Math93.com

TD 2 - Terminale S

Complexes et forme algébrique Exercices de synthèse

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Exercice 1. Équation et configuration (Bac S Pondichéry 2017)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère l'équation

$$(E): \qquad z^2 - 6z + c = 0$$

où c est un réel strictement supérieur à 9.

1. a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

1. b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + \text{i}\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - \text{i}\sqrt{c-9}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 2. Suites et complexes (Bac S Antilles 2017 Septembre) (c)

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{lll} z_0 & = & 100 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{\text{i}}{3} z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $AM \leqslant r$.

Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

Exercice 3. Équation de degré 4 (Bac S Antilles 2017)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E): \qquad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).
2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,
$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$
3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.

   Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 4. Équation et configuration : D'après Bac 2018 (c)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique le centimètre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2 - 2z + 4\right)\left(z^2 + 4\right) = 0$.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_\text{A} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_\text{B} = 2\text{i}$.
   - **2. a.** Justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   - **2. b.** Faire une figure et placer les points A et B.
3. On note F le point d'affixe $z_\text{F} = z_\text{A} + z_\text{B}$.
   - **3. a.** Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.
   - **3. b.** Calculer le module de z_F.
4. Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :
$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$
   et pour l'autre :
$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$
   Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.

Exercice 5. EPI : D'après bac 2018 (c)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que :

$$\begin{cases} z_\text{A} + z_\text{C} = z_\text{B} + z_\text{D} \\ z_\text{A} + \text{i}z_\text{B} = z_\text{C} + \text{i}z_\text{D} \end{cases}$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

Exercice 6. Complexes et suites

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} z_0 = 2\,\mathrm{i} \\ z_{n+1} = (-1+\mathrm{i})z_n - 1 + 3\,\mathrm{i} \end{cases}$$

1. Calculer z_1,z_2, z_3 et vérifier que $z_4 = -5-3\,\mathrm{i}$.

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$d'unité 1 cm, on note A_n le point d'affixe z_n et I le point d'affixe $-1+\mathrm{i}$.

2. a. Placer les points A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 et I.

2. b. Prouver que les points I, A_0 et A_4 sont alignés.

2. c. Déterminer l'affixe du point Btel que $A_1A_2A_3B$ soit un parallélogramme. Placer le point B.

2. d. Déterminer la nature du triangle $A_1A_2A_3$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$.

3. a. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .

3. b. Écrire un algorithme qui renvoie les valeurs de x_n et y_n en fonction de n .

Exercice 7. Complexes et fonctions

On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}\setminus\{2\,\mathrm{i}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{z-3-\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}-z} \end{cases}$$

1. Calculer les images par f de $z_1 = 1+\mathrm{i}$ et $z_2 = 2-3\,\mathrm{i}$.

2. Calculer $f\left(\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = -1+\mathrm{i}$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left|f(z)\right| = 1$.

Exercice 8. Complexes et constructions (DM)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 7 = 0$.

2. On considère les points I, J, P, Q, R d'affixes respectives :

$$z_I = 1, z_J = -1, z_P = 2-\mathrm{i}\sqrt{3}, z_Q = \overline{z_P}, z_R = 1+\sqrt{3}+\mathrm{i}$$

On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et de rayon 2.

2. a. Montrer que les points P, Q et R sont situés sur $\mathscr{C}$.

2. b. Construire dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ les points I, J, P, Q et R.

2. c. Calculer l'affixe du point S, symétrique de P par rapport à I, et construire S.

2. d. Montrer que le triangle PRS est rectangle isocèle en R.

3. On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}\setminus\left\{\mathrm{i}\sqrt{3}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = z' = \dfrac{z-2-\mathrm{i}\sqrt{3}}{z-\mathrm{i}\sqrt{3}} \end{cases}$$

3. a. Déterminer l'affixe du point T, image du point J par f.

3. b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points $M(z)$ du plan tels que $\left|z'\right| = 1$ où $z' = f(z)$.

3. c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points $M(z)$ du plan tels que z' soit réel où $z' = f(z)$.

Corrections

Correction de l'exercice 2 (Antilles septembre 2017)

Soit la suite de nombres complexes (z_n) *définie par :* $\left\{\begin{array}{lll} z_0 & = & 100 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{i}{3}z_n \end{array}\right.$ *pour tout entier naturel* n. *Le plan est muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. *Pour tout entier naturel* n, *on note* M_n *le point d'affixe* z_n.

1. **Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.**
   Les points M_n et M_{n+2} ont pour affixes z_n et z_{n+2}.

   $$z_{n+2} = \frac{\mathrm{i}}{3}z_{n+1} = \frac{\mathrm{i}}{3}\left(\frac{\mathrm{i}}{3}z_n\right) = \frac{\mathrm{i}^2}{9}z_n = -\frac{1}{9}z_n$$

   Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}}$ a pour affixe z_{n+2} et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$ a pour affixe z_n ; or

   $$z_{n+2} = -\frac{1}{9}z_n$$

   donc

   $$\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$$

   Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+2}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}$ sont colinéaires donc les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés quel que soit n.

2. **On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que A$M \leqslant r$. Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.**
   Le point M_n appartient au disque de centre O et de rayon 1 si $\mathrm{O}M_n \leq 1$. On sait que $\mathrm{O}M_n = |z_n|$.

   Soit (d_n) la suite définie pour tout n par $d_n = |z_n|$.

   On sait que $z_{n+1} = \dfrac{\mathrm{i}}{3}z_n$ donc

   $$\left|z_{n+1}\right| = \left|\frac{\mathrm{i}}{3}z_n\right| = \left|\frac{\mathrm{i}}{3}\right| \times |z_n| = \frac{1}{3}|z_n|$$

   donc, pour tout n, $d_{n+1} = \dfrac{1}{3}d_n$.

   De plus, $d_0 = |z_0| = 100$.

   La suite (d_n) est définie par $d_0 = 100$ et $d_{n+1} = \dfrac{1}{3}d_n$, pour tout n.

   Donc la suite (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 100$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

   On a $-1 < q < 1$ donc la suite (d_n) est convergente et a pour limite 0.
   D'après la définition de la limite d'une suite, on peut déduire que l'intervalle $[\![0\,;\,1[\![$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ce qui répond à la question.

Correction de l'exercice 4

1. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2 - 2z + 4\right)\left(z^2 + 4\right) = 0$.**

   $$\left(z^2 - 2z + 4\right)\left(z^2 + 4\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} z^2 - 2z + 4 = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 + 4 = 0 \end{array}\right. .$$

   - D'une part :

     $$z^2 - 2z + 4 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 4 = 0 \iff (z-1)^2 = -3 \iff (z-1)^2 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$$

     Cette équation a deux solutions

     $$1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \text{ et } 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

- D'autre part :

$$z^2+4=0 \iff z^2=(2\mathrm{i})^2$$

Cette équation a deux solutions :

$$2\mathrm{i} \text{ et } -2\mathrm{i}$$

- Conclusion : l'équation a quatre solutions :

$$\boxed{1+\mathrm{i}\sqrt{3};\quad 1-\mathrm{i}\sqrt{3};\quad 2\mathrm{i};\quad -2\mathrm{i}}$$

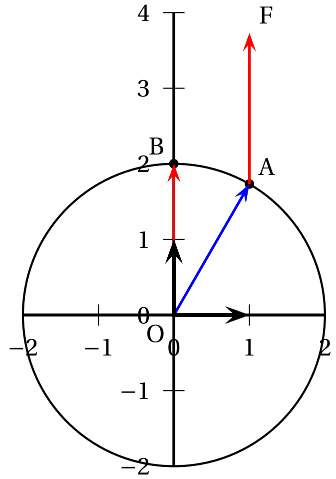
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_B=2\mathrm{i}$.

2. a. Justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

$$|z_A|^2=1+3=4=2^2 \Rightarrow |z_A|=2$$

On a donc avec les modules OA = OB = 2 : A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

2. b. Faire une figure et placer les points A et B.



3. On note F le point d'affixe $z_F=z_A+z_B$.

3. a. Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.
F se construit par la méthode du parallélogramme ; or on a vu que $OA=OB$: le parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange de côtés de mesure 2.

3. b. Calculer le module de z_F.
On a

$$z_F=z_A+z_B=1+\mathrm{i}\sqrt{3}+2\mathrm{i}=1+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+2\right)$$

Donc

$$|z_F|^2=1^2+\left(\sqrt{3}+2\right)^2=1+3+4+4\sqrt{3}=8+4\sqrt{3}=4\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Donc

$$|z_F|=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

4. Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

et pour l'autre :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.
Ces deux nombres sont positifs ($\sqrt{6}>\sqrt{2}$) ; comparons leurs carrés :

$$\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right]^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]^2 = \frac{6+2-2\sqrt{12}}{16} = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Ces deux nombres positifs ont le même carré : ils sont égaux ; les deux calculatrices donnent le résultat correct.

Correction de l'exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que :

$$\begin{cases} z_A + z_C = z_B + z_D \\ z_A + iz_B = z_C + iz_D \end{cases}$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

- La première égalité $z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{C}} = z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{D}}$ peut s'écrire :

$$z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{C}} = z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{D}} \iff \frac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{C}}}{2} = \frac{z_{\mathrm{B}} + z_{\mathrm{D}}}{2}$$

Cette égalité montre que [AC] et [BD] ont le même milieu, donc que la quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

- La deuxième égalité $z_{\mathrm{A}} + \mathrm{i}z_{\mathrm{B}} = z_{\mathrm{C}} + \mathrm{i}z_{\mathrm{D}}$ peut s'écrire :

$$z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}} = \mathrm{i}z_{\mathrm{D}} - \mathrm{i}z_{\mathrm{B}} \iff z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}} = \mathrm{i}\left[z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{B}}\right]$$

En prenant les modules des deux membres on obtient $CA = BD$.
Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur, c'est donc un rectangle.

Fin du devoir