



Math93.com

# TD 3 - Terminale S

## Complexes Partie 2

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

### Première partie

## Forme trigonométrique d'un nombre complexe

### Exercice 1. Représenter

Math'x 56, 57 p 285

Dans le plan complexe, représenter l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que :

- |                                 |   |   |  |
|---------------------------------|---|---|--|
| 1. $\arg(z) = 0 \quad (2\pi)$   | 3. $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$ | 5. $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$ | 7. $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \quad (\pi)$ |
| 2. $\arg(z) = \pi \quad (2\pi)$ | 4. $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (\pi)$  | 6. $\arg(z) = -\frac{\pi}{3} \quad (\pi)$ |  |

### Exercice 2. Module et argument

Math'x 58, 59, 64 p 285

Déterminer le module, un argument et la forme trigonométrique des nombres complexes :

- |  |  |   |   |
|--|--|---|---|
| 1. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$                     | 5. $z_5 = -4i$   | 9. $z_9 = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ |   |
| 2. $z_2 = 3 - i\sqrt{3}$                     | 6. $z_6 = -1$  |   |   |
| 3. $z_3 = 7 - 7i$                            | 7. $z_7 = 3\sqrt{2} + i\sqrt{6}$                                       |   | 10. $z_{10} = \cos \alpha - i \sin \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ |
| 4. $z_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 8. $z_8 = -3 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ |   | 11. $z_{11} = \sin \alpha - i \cos \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ |

### Exercice 3. Ensemble de points

Math'x 75 p 286

Dans le plan complexe, A est le point d'affixe  $a$  tel que :  $\begin{cases} |a| = 2 \\ \arg(a) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi) \end{cases}$ .

Soit  $f$  l'application du plan qui à tout point M d'affixe  $z$ , privé du point O d'affixe 0, associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{-2}{z}$$

1. Quelles relations lient les modules de  $z$  et  $z'$  ainsi que les arguments de  $z$  et  $z'$  ?
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que :
  2. a.  $z'$  soit un réel strictement positif ;
  2. b.  $z'$  soit un réel ;
  2. c.  $z'$  soit un imaginaire pur.
3. Dans le plan complexe, quel est l'ensemble des points M' d'affixe  $z'$  lorsque :
  3. a. M appartient au disque de centre O, de rayon 2, privé de O.
  3. b. M appartient au segment [OA], privé du point O ?
4. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points du plan  $\mathcal{P}$  invariants par  $f$ , c'est à dire des points M du plan tels que  $f(M) = M$ .

**Exercice 4. Application à la trigonométrie**

Math'x 88 p 287

On donne :

$$z_1 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$$

1. Déterminer la forme trigonométrique de :

$$z_1 ; z_2 \quad \text{et} \quad \frac{z_1}{z_2}$$

2. Déterminer la forme algébrique de  $\frac{z_1}{z_2}$ .

3. En déduire les valeurs exactes de :

$$\text{3. a. } \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right); \quad \text{3. b. } \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right); \quad \text{3. c. } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right); \quad \text{3. d. } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

**Deuxième partie****Forme exponentielle d'un nombre complexe****Exercice 5. Puissances des nombres complexes (c)**

1. Soit  $z = \sqrt{3} + i$  et  $n$  un entier relatif.  
Déterminer  $n$  pour que  $z^n$  soit un nombre complexe imaginaire pur.
2. Montrer que :  $(-1 + i)^{11} = 32 + 32i$ .

**Exercice 6. Avec des suites (c)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  
On considère la suite des points  $M_n$  d'affixes

$$z_n = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2^n}$$

1. Déterminer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} OM_n$ .
2. Démontrer que les points  $M_n$  appartiennent à une même demi-droite.

**Exercice 7. Application à la trigonométrie**

Math'x 90 p 287

1. Soit  $a$  un réel. Écrire  $e^{2ia}$  sous forme algébrique.
2. Écrire  $e^{ia}$  puis  $(e^{ia})^2$  sous forme algébrique.
3. Retrouver les formules donnant  $\cos 2a$  et  $\sin 2a$  en fonction de  $\cos a$  et  $\sin a$ .

**Exercice 8. Équations**

Math'x 97, 98 p 287

1. Soit  $\theta \in ]0; \frac{\pi}{4}[$ . Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :

$$z^2 + 2(1 - \cos 2\theta)z + 2(1 - \cos 2\theta) = 0$$

2. Soit  $\theta \in ]-\pi; \pi]$ .

2. a. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$

$$z^2 - (2 \cos \theta)z + 1 = 0$$

2. b. Donner la forme exponentielle des solutions  $z_1$  et  $z_2$ .

2. c. Placer les points images de ces solutions pour  $\theta = -\frac{2\pi}{3}$  puis pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

2. d. Quel ensemble décrivent les points d'affixes  $z_1$  et  $z_2$  lorsque  $\theta$  décrit l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ .

**Exercice 9. Factorisation astucieuse (c)**

1. Méthode 1.

**Objectif : étudier module et argument de :  $z = 1 + e^{2i\theta}$  ;  $\theta \in [0 ; \pi]$**

En utilisant la trigonométrie élémentaire, montrer que :  $z = 2 \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta)$ .

Étudier module et argument de  $z$ .

**Aide**

Les formules de duplication sont :

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
	$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$
	$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

2. Méthode 2.

**Méthode**

Si  $z = e^{i\theta_1} \pm e^{i\theta_2}$ , alors la mise en facteur de  $e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$  permet de mettre facilement en évidence le module et un argument de  $z$ .

**Objectif : étudier module et argument de :  $z = 1 + e^{2i\theta}$  ;  $\theta \in [0 ; \pi]$**

Soit

$$\theta \in [0 ; \pi] \text{ et } z = 1 + e^{2i\theta}$$

Factoriser  $z$  puis étudier module et argument. Attention, il faudra discuter selon les valeurs de  $\theta$ .

**Exercice 10. Quelques sommes (\*)**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \sum_{k=0}^n e^{ikx}$ , avec  $x \in \mathbb{R} \setminus \{p2\pi, p \in \mathbb{Z}\}$ .

1. Montrer que :

$$u_n = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$

2. En déduire que :

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) e^{i\frac{nx}{2}}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

3. Montrer alors que :

$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$	et	$\sum_{k=0}^n \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
--	----	--

4. Résoudre dans  $[0 ; 2\pi[$  l'équation :  $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = 0$ .

**Réponses**

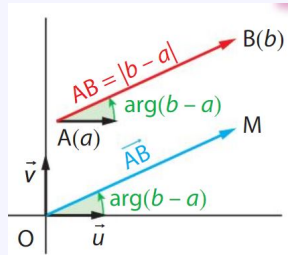
Un corrigé en vidéo sur <https://www.youtube.com>

### Troisième partie

## Géométrie : caractérisation de polygones

#### Théorème 1

1.  $(\vec{u} ; \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
2.  $AB = |z_B - z_A|$
3.  $(\vec{AB} ; \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \pmod{2\pi}$
4.  $\vec{AB}$  est d'affixe  $(z_B - z_A)$ .



#### Méthode

##### 1. Triangle isocèle ou équilatéral.

Pour montrer qu'un triangle est isocèle ou équilatéral, on peut utiliser les calculs de distances :

$$AB = |z_B - z_A|$$

##### 2. Triangle rectangle.

Pour montrer qu'un triangle ABC est rectangle (en A), on peut utiliser les calculs de distances et le théorème de Pythagore ou prouver l'existence d'un angle droit avec

$$(\vec{AB} ; \vec{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \pmod{2\pi}$$

##### 3. Parallélogramme.

Pour montrer que ABCD est un parallélogramme, on peut prouver que  $z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}}$  (attention à l'ordre des points).

##### 4. Losange.

Pour montrer que ABCD est un losange, on peut prouver :

- (1) : que ABCD est un parallélogramme ;
- (2) : que 2 côtés consécutifs du parallélogramme sont de même mesure ou que les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires.

##### 5. Rectangle.

Pour montrer que ABCD est un rectangle, on peut prouver :

- (1) : que ABCD est un parallélogramme ;
- (2) : que 2 côtés consécutifs du parallélogramme sont perpendiculaires ou que les diagonales du parallélogramme sont de même mesure.

##### 6. Carré.

Pour montrer que ABCD est un carré, on peut prouver que c'est un losange et un rectangle.

### Exercice 11. Caractérisation (c)

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 8 ; z_B = -4 + 4i \text{ et } z_C = -4i$$

Déterminer la nature du triangle ABCD.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2\sqrt{3} + 9i ; z_B = -i ; z_C = -4\sqrt{3} - 9i \text{ et } z_D = -2\sqrt{3} + i$$

Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

**Exercice 12. Racines 3-ième de l'unité**

Soit  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**1. Méthode 1**

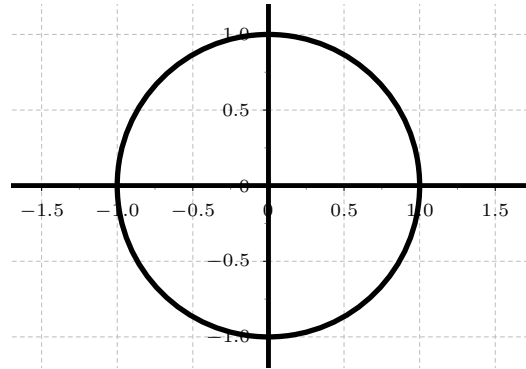
- 1. a.** Déterminer le module et l'argument principal de  $j$ .  
Donner sa forme trigonométrique et sa forme exponentielle.
- 1. b.** Calculer  $j^3$  et donner sa forme trigonométrique et sa forme exponentielle.
- 1. c.** En déduire que  $1 + j + j^2 = 0$ .  
*Aide : somme de termes consécutifs d'une ...*

**2. Méthode 2**

- 2. a.** Calculer  $j^2$  et donner sa forme trigonométrique et sa forme exponentielle.
- 2. b.** Montrer que  $j^2 = \bar{j}$ .
- 2. c.** En déduire que  $1 + j + j^2 = 0$ .

**3. Soit A, B et C d'affixes respectives 1, j et  $j^2$ .**

- 3. a.** Représenter A, B et C dans un repère.
- 3. b.** Démontrer que ABC est équilatéral.



## Quatrième partie

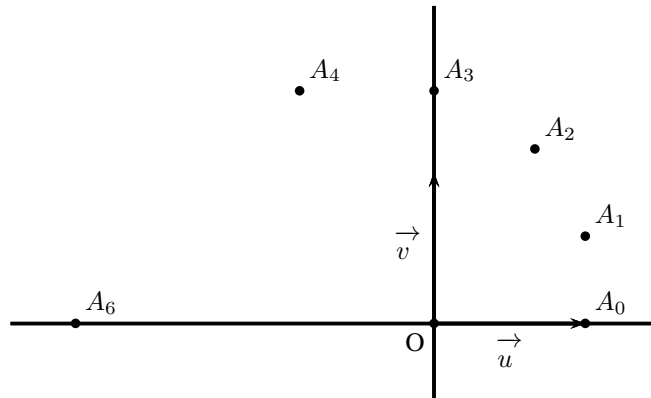
# Problèmes et compléments

### Exercice 13. Bac S - Nouvelle Calédonie, mars 2016

On considère les nombres complexes  $z_n$  définis, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  de l'annexe 2 ci-dessous.



L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points  $A_n$ .

1.

1. a. Vérifier que  $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

1. b. En déduire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle.

2.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$ .

2. b. Pour quelles valeurs de  $n$ , les points  $O$ ,  $A_0$  et  $A_n$  sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ .

3. a. Interpréter géométriquement  $d_n$ .

3. b. Calculer  $d_0$ .

3. c. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$ .

3. d. En déduire que la suite  $(d_n)_{n \geq 0}$  est géométrique puis que pour tout entier naturel  $n$ ,  $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ .

4.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

4. b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , le triangle  $OA_nA_{n+1}$  est rectangle en  $A_n$ .

4. c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point  $A_5$  sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

4. d. Justifier cette construction.



### Réponses

§ Le corrigé complet sur [www.math93.com](http://www.math93.com)

**Exercice 14. D'après Bac S - Polynésie, septembre 2015 (c)**

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe  $z$  est notée  $\Re(z)$ .

- Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe  $u = 1 - i$ .
- Déterminer, pour tout réel  $\theta$ , la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe  $e^{i\theta}(1 - i)$ .
- Déduire des questions précédentes que, pour tout réel  $\theta$ ,

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

**Exercice 15. Bac S - Métropole, juin 2018**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On pose  $z_0 = 8$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$z_{n+1} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} z_n.$$

On note  $A_n$  le point du plan d'affixe  $z_n$ .

1.

1. a. Vérifier que :

$$\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

1. b. En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  sous forme exponentielle et vérifier que  $z_3$  est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.
1. c. Représenter graphiquement les points  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  ; on prendra pour unité le centimètre.

2.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{6}}.$$

2. b. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = |z_n|$ .  
Déterminer la nature et la limite de la suite  $(u_n)$ .

3.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $k$ ,

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

En déduire que, pour tout entier naturel  $k$ , on a l'égalité :  $A_k A_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} O A_{k+1}$ .

3. b. Pour tout entier naturel  $n$ , on appelle  $\ell_n$  la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ , ...,  $A_n$ .  
On a ainsi :  $\ell_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$ .  
Démontrer que la suite  $(\ell_n)$  est convergente et calculer sa limite.

**Réponses**

§ Le corrigé complet sur [www.math93.com](http://www.math93.com)

**Exercice 16. Vrai ou faux Antilles, juin 2019**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère le nombre complexe  $c = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$  et les points S et T d'affixes respectives  $c^2$  et  $\frac{1}{c}$ .

**1. Affirmation 1 :**

Le nombre  $c$  peut s'écrire  $c = \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})$ .

**2. Affirmation 2 :**

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $c^{3n}$  est un nombre réel.

**3. Affirmation 3 :**

Les points O, S et T sont alignés.

**4. Affirmation 4 :**

Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$|c| + |c^2| + \dots + |c^n| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

**Exercice 17. Vrai ou faux, Polynésie septembre 2019****1.** On considère le nombre complexe  $z = 1 + i\sqrt{3}$ .

**Affirmation 1 :** Le nombre complexe  $z^2$  est un réel positif.

**Affirmation 2 :** L'argument du nombre complexe  $z^{2019}$  vaut 0 modulo  $2\pi$ .

Dans ce qui suit, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**2.** On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $2z^2 - 3z + 5 = 0$ .

**Affirmation 3 :** Cette équation admet deux solutions dont les images sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

**3.** À tout point  $M$  d'affixe  $z$  du plan complexe, on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = \bar{z}(1 - z).$$

**Affirmation 4 :** Il existe une infinité de points  $M$  confondus avec leur point image  $M'$ .

**Exercice 18. Baccalauréat S Amérique du Sud 12 novembre 2018**

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$  tels que :

$$\begin{cases} z_A + z_C = z_B + z_D \\ z_A + iz_B = z_C + iz_D \end{cases}$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

**Exercice 19. Vrai/ Faux : Baccalauréat S Nouvelle Calédonie mars 2019**

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe  $z$

$$z(z^2 - 8z + 32) = 0.$$

**Affirmation 1** : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

2. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points dont les affixes  $z$  vérifient

$$|z - 3| = |z + 3|.$$

**Affirmation 2** : L'ensemble  $\mathcal{E}$  est le cercle de centre O et de rayon 3.

3. On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$z_n = (1 - i\sqrt{3})^n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

**Affirmation 3** : Pour tout entier naturel  $n$ , les points  $M_n$ , O et  $M_{n+3}$  sont alignés.

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel  $x$

$$\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) = 0.$$

**Affirmation 4** : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle  $] -\pi ; \pi ]$  qui sont :  $-\frac{\pi}{4}$  ;  $0$  ;  $\frac{\pi}{4}$  et  $\pi$ .

**Exercice 20. Racines  $n$ -ièmes de l'unité (\*)**

**Définition 1**

1. Si  $Z \in \mathbb{C}$  ; on appelle racine  $n$ -ième de  $Z$  tout complexe  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z^n = Z$ .
2. Les racines  $n$ -ièmes de 1 sont encore appelées **racines  $n$ -ièmes de l'unité**.
3. L'ensemble des **racines  $n$ -ièmes de l'unité** est noté  $\mathbb{U}_n$ .

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$$

Démontrer que :

1.  $\mathbb{U}_n$  est non vide.
2. Le produit de deux éléments de  $\mathbb{U}_n$  est élément de  $\mathbb{U}_n$ .
3. L'inverse de deux éléments de  $\mathbb{U}_n$  est élément de  $\mathbb{U}_n$ .
4. (\*) Il existe exactement  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité, qui sont les complexes :

$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}} = (z_1)^k, \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

5. Si  $\xi$  (on prononce la lettre grecque « xi ») est une racine  $n$ -ième de l'unité, alors :

$$1 + \xi + \xi^2 + \dots + \xi^{n-1} = 0$$

6. La somme des racines  $n$ -ièmes de l'unité est égale à 0

## Cinquième partie

# Correction

### Correction de l'exercice 5 : Puissances des nombres complexes (c)

1. Soit  $z = \sqrt{3} + i$  et  $n$  un entier relatif. Déterminer  $n$  pour que  $z^n$  soit un nombre complexe imaginaire pur.

$$z = 2 e^{i \frac{\pi}{6}} \implies z^n = 2^n e^{n i \frac{\pi}{6}}$$

Donc pour que  $z^n$  soit un nombre complexe imaginaire pur il faut que :

$$n i \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z}$$

2. Montrer que :  $(-1 + i)^{11} = 32 + 32i$ .

$$-1 + i = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}} \implies (-1 + i)^{11} = \sqrt{2}^{11} e^{33i \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}^{11} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

donc

$$(-1 + i)^{11} = 2^5(1 + i)$$

### Correction de l'exercice 6 : suites

1. Déterminer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} OM_n$ .



#### Réponses

$$OM_n = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} OM_n = 0$$

2. Démontrer que les points  $M_n$  appartiennent à une même demi-droite.



#### Réponses

$$\left( \vec{u} ; \overrightarrow{OM_n} \right) = \arg(-1 + i\sqrt{3}) - \arg(2^n) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$

donc les points  $M_n$  appartiennent à la demi-droite d'origine  $O$ , passant par le point  $A$  tel que  $\left( \vec{u} ; \overrightarrow{OA} \right) = \frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$ .

### Correction de l'exercice 9 : Factorisation astucieuse

1. Méthode 1.

Factoriser  $z$  puis étudier module et argument. Attention, il faudra discuter selon les valeurs de  $\theta$ .

On a :

$$z = 1 + e^{2i\theta} = e^{i\theta} (e^{-i\theta} + e^{i\theta}) = 2 \cos \theta e^{i\theta}$$

- Si  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , alors  $\cos \theta > 0$  et donc  $|z| = 2 \cos \theta$  et un argument de  $z$  est  $\theta$ .
- Si  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ , alors  $\cos \theta < 0$  et donc  $|z| = -2 \cos \theta$  et un argument de  $z$  est  $\theta + \pi$ . En effet  $e^{i\pi} = -1$  d'où :

$$z = |2 \cos \theta| \times (-1) \times e^{i\theta} = |2 \cos \theta| \times e^{i(\theta+\pi)}$$

- Si  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , alors  $z = 0$  et il n'a pas d'argument.

2. Méthode 2.

En utilisant la trigonométrie élémentaire, montrer que  $z = 2 \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta)$ . Étudier module et argument de  $z$ .

On utilise les formules :  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  et  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ .

$$\begin{aligned} z &= 1 + e^{2i\theta} \\ z &= 1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta \\ z &= 2 \cos^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta \\ z &= 2 \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

On termine ensuite comme avec la méthode 1.

### Éléments de correction de l'exercice 11

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :  $z_A = 8$  ;  $z_B = -4 + 4i$  et  $z_C = -4i$ .

$$AB = 4\sqrt{10} \text{ et } AC = BC = 4\sqrt{5}$$

Donc ABC est isocèle rectangle en A. (on utilise la réciproque que Pythagore)

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :  $z_A = 2\sqrt{3} + 9i$  ;  $z_B = -i$  ;  $z_C = -4\sqrt{3} - 9i$  et  $z_D = -2\sqrt{3} + i$ .

$$z_{\overrightarrow{AB}} = -2\sqrt{3} - 10i = z_{\overrightarrow{DC}}$$

Donc ABCD est un parallélogramme.

- Méthode 1.

$$\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{BD}}} = 3\sqrt{3}i \implies (\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

donc les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires, ABCD est un losange.

- Méthode 2.  $AB = BC$ , donc 2 côtés consécutifs du parallélogramme ABCD sont de même mesure, ABCD est un losange.

### Correction de l'exercice 14 : Polynésie, septembre 2015

1. Soit  $u$  le nombre complexe  $1 - i$ .

$$|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \text{ donc } u = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$\text{On cherche le réel } \alpha \text{ tel que } \begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ Donc } \alpha = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

L'écriture complexe du nombre  $u = 1 - i$  est donc  $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ .

2.  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  donc

$$\begin{aligned} e^{i\theta}(1 - i) &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(1 - i) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) - i \cos(\theta) - i^2 \sin(\theta) \\ &= (\cos(\theta) + \sin(\theta)) + i (\sin(\theta) - \cos(\theta)) \text{ (forme algébrique)} \end{aligned}$$

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ donc } e^{i\theta}(1 - i) = e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} \text{ (écriture exponentielle)}$$

3. Le nombre complexe  $e^{i\theta}(1 - i)$  s'écrit d'une part  $(\cos(\theta) + \sin(\theta)) + i (\sin(\theta) - \cos(\theta))$  et d'autre part  $\sqrt{2}e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$ , c'est-à-dire  $\sqrt{2} \left( \cos \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right)$ .

$$\text{En identifiant les parties réelles, on obtient : } \cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right).$$

**Remarque**

C'est un résultat que l'on peut retrouver directement en développant  $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$  au moyen de la formule  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ .