Math93.com

TD 1 - Terminale S
La Fonction Exponentielle

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Première partie

A partir de la définition proposée

Exercice 1. Caractérisation fonctionnelle de la fonction exponentielle

On cherche à démontrer le théorème suivant qui montre que l'on aurait pu définir la fonction exponentielle comme l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et vérifiant la relation fonctionnelle avec la condition $f'(0) = 1$.

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et telle que pour tous réels x et y on a :

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{et} \quad f'(0) = 1$$

1. $\underline{(1) \Longrightarrow (2)}$.
Cette implication est partiellement démontrée en cours. On applique juste la bonne propriété. Il reste juste à prouver que $f'(0) = 1$ ce qui est assez aisé.

2. $\underline{(2) \Longrightarrow (1)}$.
On suppose que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et telle que pour tous réels x et y on a :

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{et} \quad f'(0) = 1$$

2. a. Montrer que pour tout x réel et h réel non nul on a :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \times \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

2. b. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' = f$.

2. c. Conclure.

Deuxième partie

Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété 1 (Propriétés de la fonction exponentielle)

Pour tous réels x et y :

1. $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{y}$
2. $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$
3. $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}}$
4. $\mathrm{e}^{xy} = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^{y}$

Exercice 2. Propriétés de la fonction exponentielle

Simplifier les expressions suivantes pour x réel quelconque en les exprimant sous la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$ où u sera un polynôme.

- $A(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-3x}}{\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$
- $B(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{3x}}$
- $C(x) = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2}{\mathrm{e}^{3x+1}}$
- $D(x) = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 \times \mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-2x} \times \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2}$

Réponses
$A(x) = e^{0} = 1$; $B(x) = e^{-3x}$; $C(x) = e^{3x-1}$; $D(x) = e^{x}$

Exercice 3. Propriétés de la fonction exponentielle

Démontrer, pour tout réel x, les égalités suivantes :

1. $\dfrac{2\,\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1}$
2. $\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)^2 = \left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^2 \times \mathrm{e}^{-2x}$
3. $\dfrac{2-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1} = 2 - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Troisième partie

Équations et inéquations

Propriété 2 (Equation et inéquation)

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tous réels x et y on a :

1. $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{y} \iff x = y$
2. $\mathrm{e}^{x} < \mathrm{e}^{y} \iff x < y$

Par ailleurs : on note $\ln(k)$ et on lit **logarithme népérien** de $k > 0$, la solution unique de l'équation : $\mathrm{e}^{x} = k$.

$$\mathrm{e}^{x} = k \iff x = \ln k \quad (k > 0)$$

On en déduit que : $\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e} = 1$

Exercice 4. Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 = \mathrm{e}^{x^2+1}$
2. $\left(1+\mathrm{e}^{x}\right) \times \left(2-x^2\right) = 0$
3. $\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{x}\right) \times \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} - \mathrm{e}^{x}\right) = 0$
4. $\dfrac{3\,\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+9} = 2$

Réponses
$S_1 = \{1\}$; $S_2 = \left\{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right\}$; $S_3 = \{0\,;\,1\}$; $S_4 = \{\ln 19\}$

Exercice 5. Équation et changement de variable

Méthode 1

On cherche à résoudre l'équation :

$$e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0$$

1. On effectue le changement de variable $X = e^{x}$.
   On remarque tout d'abord que :
   $$e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0 \iff (e^{x})^2 + 2e^{x} - 3 = 0$$
   On pose alors $X = e^{x}$ et donc :
   $$(e^{x})^2 + 2e^{x} - 3 = 0 \iff \begin{cases} X = e^{x} \\ X^2 + 2X - 3 = 0 \end{cases}$$
2. On va résoudre l'équation en X.
   L'expression $\left(X^2 + 2X - 3\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(aX^2 + bX + c\right)$. Avec :
   $$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 16 > 0$$
   Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $X \longmapsto \left(X^2 + 2X - 3\right)$ admet deux racines réelles distinctes :
   $$X_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} = -3 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} = 1$$
3. On en déduit les solutions en x en résolvant les équations $X_1 = e^{x}$ et $X_2 = e^{x}$.
   - On a
     $$X_1 = -3 \iff e^{x} = -3$$
     N'admet pas de solution car l'exponentielle est toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$.
   - On a
     $$X_2 = 1 \iff e^{x} = 1 = e^{0} \iff x = 0$$
4. Conclusion : l'équation admet une unique solution $x = 0$.

Suivez le modèle pour résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} + 4e^{x} = 5$
2. $e^{x}\left(e^{2x} + e^{x} - 2\right) = 0$
3. $\left(e^{x} - e\right)\left(e^{2x} + 3e^{x} + 2\right) = 0$

Réponses
$S_1 = \{0\}$; $S_2 = \{0\}$; $S_3 = \{1\}$

Exercice 6. Systèmes d'équations

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} e^{x} e^{y} = \dfrac{1}{e} \\ (e^{x})^{y} = e^{-6} \end{cases}$
2. $\begin{cases} y\,e^{x} + e^{x} = 1 \\ y\,e^{2x} + e^{x+1} = e \end{cases}$
3. $(*) \begin{cases} e^{2x+1} - e^{y} = -e \\ e^{2x+1} + e^{y} = 5e \end{cases}$

Réponses

$S_1 = \{(2\,;\,-3)\,;\,(-3\,;\,2)\}$ $\quad S_2 = \left\{(0\,;\,0)\,;\,\left(1\,;\,e^{-1} - 1\right)\right\}$; $S_3 = \left\{\left(\dfrac{\ln 2}{2}\,;\,1 + \ln 3\right)\right\}$

Exercice 7. Inéquation et étude de signe

Méthode 2

Pour étudier le signe ou résoudre une inéquation comportant des termes en e^{x} on va chercher à factoriser l'expression au maximum en exhibant des facteurs strictement positifs ou positifs. Le fait que l'exponentielle soit strictement positive sur $\mathbb{R}$ est souvent invoqué. L'application principale de cela sera évidemment l'étude du signe de la dérivée ou de la dérivée seconde (pour étudier la convexité).

Par exemple étudions le signe de l'expression A définie sur $[-10\,;\,20]$ par : $A(x)=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{x^2+1}$.

1. On exhibe les facteurs strictement positifs sur l'intervalle d'étude.
   - La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori sur $[-10\,;\,20]$ on a : $\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)>0$.
   - Sur $[-10\,;\,20]$ on a aussi : $x^2\geq 0 \Longrightarrow x^2+1\geq 1>0$.
   - De ce fait $A(x)$ est du signe du facteur $\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)$.
2. Étude du signe de $\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)$.
   On a pour tout réel x de $[-10\,;\,20]$:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)=0 &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x}=1\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{0}\\ &\Longleftrightarrow 2x=0\\ &\Longleftrightarrow x=0\in[-10\,;\,20]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)>0 &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x}>1\\ &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2x}>\mathrm{e}^{0}\end{aligned}$$

or exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow 2x>0\\ &\Longleftrightarrow x>0 \text{ et } x\in[-10\,;\,20]\end{aligned}$$

Conclusion : **Attention**, on se ramène bien à l'ensemble de définition $[-10\,;\,20]$ donc :

$$\forall x\in[-10\,;\,20]\quad:\quad\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}-1>0\Longleftrightarrow 0<x\leq 20\\ \mathrm{e}^{2x}-1=0\Longleftrightarrow x=0\end{cases}\quad\Longrightarrow \mathrm{e}^{2x}-1<0\Longleftrightarrow -10\leq x<0$$

3. Tableau de signe de $A(x)$.
   On a montré que A était du signe du facteur $\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)$ donc :

x	-10		0		20
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	

4. Applications :
   - Avec $A(x)=f'(x)$: On applique cette méthode si l'expression est la dérivée de f par exemple pour obtenir les variations de f.
   - On peut résoudre l'inéquation $A(x)>0$ ou $A(x)\leq 0$ par exemple : $A(x)>0\Longleftrightarrow x\in]0\,;\,20]$

1. Résoudre sur l'intervalle $[-10\,;\,30]$ l'inéquation :

$$\frac{\left(x^2+\mathrm{e}\right)\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$$

2. Étudier sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ le signe de l'expression : $B(x)=\dfrac{x\,\mathrm{e}^{x}+(2x-6)\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}}$.

Réponses
$S_1=[-10\,;\,-1]$, $B(x)<0\Longleftrightarrow x\in[0\,;\,2[$ *et* $B(x)>0\Longleftrightarrow x\in\,]2\,;\,30]$

Quatrième partie
Dérivation et étude de fonctions

Exercice 8. Dérivation ... Un peu de gammes

Théorème 2

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I.

I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »
I	$u \times v$	$u'v + uv'$	$(u \times v)' = u'v + uv'$
I avec v non nul sur I	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
I avec v non nul sur I	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$
I	u^2	$2u'u$	$(u^2)' = 2u'u$
I avec u positif non nul sur I	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
I	u^n où $n \in \mathbb{N}^*$	$n\, u'\, u^{n-1}$	$(u^n)' = n\, u'\, u^{n-1}$
I	e^{u}	$u'\ \mathrm{e}^{u}$	$(\mathrm{e}^{u})' = u'\ \mathrm{e}^{u}$

Montrer que les dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur un intervalle I à déterminer, peuvent s'écrire sous cette forme.

$f_1(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2+1}$	$f_1'(x) = \left(2x^2+1\right)\,\mathrm{e}^{x^2+1}$
$f_2(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x^3} + \mathrm{e}^{-1}$	$f_2'(x) = \left(3x^4+2x\right)\,\mathrm{e}^{x^3}$
$f_3(x) = \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}$	$f_3'(x) = \mathrm{e}^{x}$
$f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$f_4'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$
$f_5(x) = -\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{x}$	$f_5'(x) = 2e^{x}\left(1 - e^{x}\right)$
$f_6(x) = 1 - \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^{2x}$	$f_6'(x) = -4e^{2x}\left(1+x\right)$

$f_7(x) = (1+2x)\,\mathrm{e}^{1+2x}$	$f_7'(x) = 4(1+x)\,\mathrm{e}^{1+2x}$
$f_8(x) = \dfrac{3\,\mathrm{e}^{x} + 2}{x}$	$f_8'(x) = \dfrac{3x\,\mathrm{e}^{x} - 3\,\mathrm{e}^{x} - 2}{x^2}$
$f_9(x) = \dfrac{0,01}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$	$f_9'(x) = \dfrac{0,02\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2}$
$f_{10}(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$	$f_{10}'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-2x^2+2x-1\right)}{x^2}$
$f_{11}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+2x+1}}{\mathrm{e}^{x^2+x+1}}$	$f_{11}'(x) = \mathrm{e}^{x}$
$f_{12}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x} + 1}$	$f_{11}'(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2}$

Exercice 9. Etude des variations (c)

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $I = [0\,;\,100]$ par :

$$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-3x+1}$$

Déterminer la dérivée de la fonction f , puis dresser le tableau de variation de f. Vous donnerez dans ce tableau les valeurs exactes de f aux bornes de l'intervalle.

2. On considère la fonction g définie et dérivable sur $J = [1\,;\,50]$ par :

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{1-5x}}{x}$$

Déterminer la dérivée de la fonction g , puis dresser le tableau de variation de g. Vous donnerez dans ce tableau les valeurs exactes de g aux bornes de l'intervalle.

3. On considère la fonction h définie et dérivable sur $[0\,;\,10]$ par :

$$h(x) = x^2\ \mathrm{e}^{1-2x}$$

Déterminer la dérivée de la fonction h , puis dresser le tableau de variation de h. Vous donnerez dans ce tableau les valeurs exactes de h aux bornes de l'intervalle.

Réponses

$f'(x) = (2-6x)\,e^{-3x+1}$; *f croissante sur* $\left[0\,;\,\frac{1}{3}\right]$ *et décroissante sinon.*

$g'(x) = \dfrac{(-5x-1)\,e^{1-5x}}{x^2}$; *g décroissante sur* $[1\,;\,50]$.

$h'(x) = \left(2x-2x^2\right)\ e^{1-2x}$; *h croissante sur* $[0\,;\,1]$ *et décroissante sur* $[1\,;\,10]$. .

Exercice 10. Un problème de tangentes 1 (c)

f et g sont des fonctions définies sur R par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ \right)$.

1. Étudier le sens de variation de chaque fonction.

2. Étudier les intersections éventuelles de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune en O.

Exercice 11. Un problème de tangentes 2 (c)

Soit f définie sur R par :

$$f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ \right)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes qui passent par l'origine du repère ?

Exercice 12. Avec une fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sue I par :

$$f(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}$$

1. <u>Étude de g.</u>

1. a. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0\,;\,1]$ et que $g(x) > 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$

1. b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. <u>Étude de f.</u>

2. a. Montrer que f est définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$.

2. b. Montrer que sur $[0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)\,\mathrm{e}^{-x}}{(x^2+1)^2}$$

2. c. En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice 13. Avec une fonction auxiliaire ... plus fourbe

Soit f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \frac{x+1}{\mathrm{e}^{x}-1}$$

1. <u>Étude de g.</u>

1. a. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x\,\mathrm{e}^{x} - 1$$

1. b. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

1. c. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. <u>Étude de f.</u>

2. a. Montrer que f est définie sur $I = \mathbb{R}^*$.

2. b. Montrer que f' et g sont de mêmes signes.

2. c. En déduire les variation de f sur $\mathbb{R}^*$.

Cinquième partie

Avec des suites

Exercice 14. Sens de variations (c)

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{n}-1}{\mathrm{e}^{n}+1}$.

Exercice 15. Suites arithmétiques et géométriques

Soit (a_n) la suite arithmétique de raison $r = -0,5$ et de premier terme $a_0 = 2$.
Pour tout entier n on pose $b_n = \mathrm{e}^{-a_n}$.

1. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique.

2. En déduire son terme général.

Exercice 16. La récurrence ... encore

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \,\mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel : $u_n > 0$.

2. Déterminer le sens de variation de (u_n).

3. En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

4. On admet que ℓ vérifie la relation : $\ell = \ell\,\mathrm{e}^{-\ell}$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 17. (c) Un grand classique : une suite qui tend vers e

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1. Calculer les cinq premier termes de la suite.

2. Première étape.

2. a. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$1 + x \leq \mathrm{e}^x$$

2. b. En déduire que si $n \geq 1$ alors :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}$$

3. Deuxième étape.

3. a. Montrer que, pour tout réel $x < 1$, on a :

$$\mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x}$$

3. b. En déduire que si $n \geq 1$ alors :

$$\mathrm{e} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

4. Dernière étape.

4. a. En déduire que si $n \geq 1$ on a :

$$0 \leq \mathrm{e} - u_n \leq \frac{3}{n}$$

4. b. En conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

Sixième partie

Problèmes et compléments

Exercice 18. Étude de fonction ... comme au bac

Soit f la fonction de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$ définie sur $[0\,;\,+\infty]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\,x} - \frac{x^2}{2} - 2x - 2$$

1. Calculer f' la dérivée de f puis la dérivée seconde f''.
2. Étudier le signe de f'' et en déduire les variations de f'.
3. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,+\infty]$. Donner un encadrement de α au millième.
4. En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty]$.
5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ au centième.
6. Déterminer l'équation de la tangente T_2 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2,
   puis celle de la tangente T_α à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse α.
7. Tracer $\mathscr{C}_f$ et les tangentes T_2 et T_α.

Exercice 19. Un encadrement classique : à savoir redémontrer

1. Montrer que pour tout réel x on a :
   $$1 + x \leq \mathrm{e}^{\,x}$$
   Aide *: on pourra étudier la fonction* $f : x \longmapsto e^{\,x} - (1 + x)$.
2. Étudier les variation sur $\mathbb{R}_-$ de la fonction
   $$g : x \longmapsto \mathrm{e}^{\,x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$$
3. En déduire que pour tout réel $x \leq 0$ on a :
   $$\forall x \in \left]-\infty\,;\,0\right], \quad 1 + x \leq \mathrm{e}^{\,x} \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Exercice 20. Fonctions hyperboliques : encore un grand classique

La fonction cosinus hyperboliques notée ch et la fonction sinus hyperbolique, notés sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{ch}\,(x) = \frac{\text{e}^{\,x} + \text{e}^{\,-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}\,(x) = \frac{\text{e}^{\,x} - \text{e}^{\,-x}}{2}$$

La fonction tangente hyperboliques notée th est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{th}\,(x) = \frac{\text{sh}\,(x)}{\text{ch}\,(x)}$$

1. Montrer que pour tous réels x et y on a :

- **1. a.** $\text{ch}^{\,2}(x) - \text{sh}^{\,2}(x) = 1$.
- **1. b.** $\text{sh}\,(x+y) = \text{sh}\,(x)\text{ch}\,(y) + \text{ch}\,(x)\text{sh}\,(y)$.
- **1. c.** $\text{ch}\,(x+y) = \text{ch}\,(x)\text{ch}\,(y) + \text{sh}\,(x)\text{sh}\,(y)$.
- **1. d.** $\text{sh}\,(2x) = 2\text{sh}\,(x)\text{ch}\,(x)$.
- **1. e.** $\text{ch}\,(2x) = \text{ch}^{\,2}(x) + \text{sh}^{\,2}(x) = 2\text{ch}^{\,2}(x) - 1 = 1 + 2\text{sh}^{\,2}(x)$

2. Montrer que pour tout réel x les fonctions sh, ch et th sont dérivables et que :

$$\text{ch}^{\,\prime}(x) = \text{sh}\,(x) \quad \text{et} \quad \text{sh}^{\,\prime}(x) = \text{ch}\,(x) \quad \text{et} \quad \text{th}^{\,\prime}(x) = \frac{1}{\text{ch}^{\,2}(x)} = 1 - \text{th}^{\,2}(x)$$

3. Étudier les variations des 3 fonctions hyperboliques.

4. Montrer que pour tout réel x :

$$\text{th}\,(2x) = \frac{2\text{th}\,(x)}{1 + \text{th}^{\,2}(x)}$$

En déduire que pour tout réel x non nul :

$$th(x) = \frac{2}{\text{th}\,(2x)} - \frac{1}{\text{th}\,(x)}$$

5. Si x est un réel non nul et n un entier naturel, simplifier l'écriture (i.e. l'écrire sans le symbole somme) :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\, \text{th}\,\left(2^k\, x\right)$$

Exercice 21. Développer votre identité ...

Soit x et y deux réels distincts quelconques.

1. Montrer que :

$$\frac{\text{e}^{\,x} + \text{e}^{\,y}}{2} > \text{e}^{\,\frac{x+y}{2}}$$

2. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Correction

Correction de l'exercice 9

1. On a :

$$f : \begin{cases} [0\,;\,100] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-3x+1} \end{cases}$$

- Calcul de la dérivée.
  La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,100]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,100]\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x) \quad : \quad \begin{cases} u(x) = 2x & ; \quad u'(x) = 2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-3x+1} & ; \quad v'(x) = \left(-3\,\mathrm{e}^{-3x+1}\right) \end{cases}$$

  On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,100]\,,\quad f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 2 \times \mathrm{e}^{-3x+1} + 2x \times \left(-3\,\mathrm{e}^{-3x+1}\right) \end{aligned}$$

  Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,100]\ ;\ f'(x) = (2 - 6x)\,\mathrm{e}^{-3x+1}}$$

- Étude du signe de la dérivée.
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La dérivée est donc du signe du facteur $(2 - 6x)$ sur $[0\,;\,100]$ soit puisque :

$$2 - 6x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

x	0		$\frac{1}{3}$		100
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$	$\searrow$	$200\,\mathrm{e}^{-299}$

2. On a :

$$g : \begin{cases} [0\,;\,100] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1-5x}}{x} \end{cases}$$

- Calcul de la dérivée.
  La fonction g est dérivable sur $[1\,;\,50]$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  La fonction g est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$$\forall x \in [1\,;\,50]\ ;\ g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad : \quad \begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{1-5x} & ; \quad u'(x) = -5\,\mathrm{e}^{1-5x} \\ v(x) = x & ; \quad v'(x) = 1 \end{cases}$$

  On a donc :

$$\forall x \in [1\,;\,50]\,,\quad g'(x) = \frac{-5\,\mathrm{e}^{1-5x} \times x - \mathrm{e}^{1-5x} \times 1}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in [1\,;\,50]\,,\quad g'(x) = \frac{(-5x - 1)\,\mathrm{e}^{1-5x}}{x^2}}$$

- <u>Étude du signe de la dérivée</u>.
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et le dénominateur x^2 est strictement positif sur $[1\,;\,50]$. La dérivée est donc du signe du facteur $(-5x-1)$ sur $[1\,;\,50]$ soit puisque :

$$-5x-1=0 \Longleftrightarrow x=\frac{-1}{5}$$

x	1		$\frac{-1}{5}$		50
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de g	e^{-4}	$\nearrow$	$g\left(\frac{-1}{5}\right)=-5\,\mathrm{e}^{2}$	$\searrow$	$\frac{\mathrm{e}^{-249}}{50}$

3. On a :

$$h:\left\{\begin{array}{rcl}[1\,;\,10] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & h(x)=x^2\ \mathrm{e}^{1-2x}\end{array}\right.$$

- <u>Calcul de la dérivée</u>.
  La fonction h est dérivable sur $[1\,;\,10]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  La fonction h est de la forme uv donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$$\forall x\in[1\,;\,10]\ ;\ h(x)=u(x)\times v(x)\quad:\quad\left\{\begin{array}{lcl}u(x)=x^2 & ; & u'(x)=2x\\ v(x)=\ \mathrm{e}^{1-2x} & ; & v'(x)=\left(-2\,\mathrm{e}^{1-2x}\right)\end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in[1\,;\,10]\,,\ \ h'(x)&=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)\\ h'(x)&=2x\times\ \mathrm{e}^{1-2x}+x^2\times\left(-2\,\mathrm{e}^{1-2x}\right)\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x\in[1\,;\,10]\ ;\ h'(x)=\left(2x-2x^2\right)\ \mathrm{e}^{1-2x}}$$

- <u>Étude du signe de la dérivée</u>.
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La dérivée est donc du signe du facteur $\left(2x-2x^2\right)$ sur $[1\,;\,10]$. La fonction $x\longmapsto\left(2x-2x^2\right)=2x(1-x)$ est une fonction polynôme du second degré dont les racines sont 0 et 1. Elle est donc du signe du coefficient de x^2 qui est $-2<0$ soit négative à l'extérieur des racines et positive ailleurs. La fonction dérivée est donc négative sur $[1\,;\,10]$ et on obtient alors :

x	1		10
Signe de $h'(x)$	0	$-$	
Variation de h	e^{-1}	$\searrow$	$100\,\mathrm{e}^{-19}$

Correction de l'exercice 10

f et g sont des fonctions définies sur R par :

$$f(x)=x\,\mathrm{e}^{x}\qquad\text{et}\qquad g(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.
On donne juste ***des éléments de correction****, cela ne constitue pas une rédaction ...*

1. Étudier le sens de variation de chaque fonction.

$$f'(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{\,x} \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \frac{1-x}{\mathrm{e}^{\,x}}$$

Donc f croissante sur $[-1\ ;\ +\infty[$ et décroissante ailleurs.
g décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ et croissante ailleurs.

2. Étudier les intersections éventuelles de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

$$f(x) = g(x) \iff x = 0$$

Or $f(0) = g(0) = 0$ donc les courbes se croisent en O(0 ; 0).

3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune en O.

- Tangente à $\mathscr{C}_f$ en O d'équation : $y = x$.
- Tangente à $\mathscr{C}_g$ en O d'équation : $y = x$.

Correction de l'exercice 11

On donne juste ***des éléments de correction****, cela ne constitue pas une rédaction ...*

Soit f définie sur R par : $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{\,-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes qui passent par l'origine du repère ?
On a :

$$f'(x) = (2x - x^2)\,\mathrm{e}^{\,-x}$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(a)x - af'(a) + f(a)$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes qui passent par l'origine du repère si et seulement si $-af'(a) + f(a) = 0$ soit :

$$-af'(a) + f(a) = 0 - a(2a - a^2)\,\mathrm{e}^{\,-x} + a^2\,\mathrm{e}^{\,-a} = 0$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -af'(a) + f(a) = 0 &\iff -a(2a - a^2) + a^2 = 0 \\ &\iff a^3 - a^2 = 0 \\ &\iff a^2(a-1) = 0 \\ &\iff a = 0 \text{ ou } a = 1 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 14

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\,n} - 1}{\mathrm{e}^{\,n} + 1}$.

On obtient pour n entier :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2\,\mathrm{e}^{\,n}(\,\mathrm{e}\,-1)}{(\,\mathrm{e}^{\,n+1} + 1)\,(\,\mathrm{e}^{\,n} + 1)} < 0$$

Donc la suite est strictement décroissante.

Correction de l'exercice 17

Éléments de correction. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. Calculer les cinq premier termes de la suite.

2. Première étape.

2. a. Montrer que, pour tout réel x, on a : $1+x \leq \mathrm{e}^x$.
Il suffit d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

2. b. En déduire que si $n \geq 1$ alors : $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}$.

Pour n entier $n \geq 1$, on pose $x = \dfrac{1}{n}$ puis on compose par la fonction $x \longmapsto x^n$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $n \geq 1$.

3. Deuxième étape.

3. a. Montrer que, pour tout réel $x < 1$, on a : $\mathrm{e}^x \leq \dfrac{1}{1-x}$.
On remplace x par $(-x)$ dans l'inégalité précédente et donc pour tout réel x on a :

$$1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$$

Si $x < 1$ alors $0 < 1-x \leq \mathrm{e}^{-x}$ et donc par composition par la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ on a : $\mathrm{e}^x \leq \dfrac{1}{1-x}$.

3. b. En déduire que si $n \geq 1$ alors : $\mathrm{e} \leq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.
Pour n entier $n \geq 1$, on pose $x = \dfrac{1}{n+1} < 1$ et en remplaçant dans l'inégalité :

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n}$$

Puis on compose par la fonction $x \longmapsto x^{n+1}$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $n \geq 1$.

4. Dernière étape.

4. a. En déduire que si $n \geq 1$ on a : $0 \leq \mathrm{e} - u_n \leq \dfrac{3}{n}$.
D'après les questions 1 et 2 on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Donc

$$0 \leq \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n}}$$

Soit

$$0 \leq \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n} \leq \frac{\mathrm{e}}{n} \leq \frac{3}{n}$$

4. b. En conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.
Aisé par théorème d'encadrement.