Math93.com

TD 1 - Terminale S
Lois à densité

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Première partie
Des lois continues et fonctions de densité (Généralités)

Prérequis

Le **I - Des lois continues et fonctions de densité** du cours disponible sur www.math93.com

Exercice 1. Montrer qu'une fonction est une densité de probabilité sur I (c)

Définition 1 (Fonction à densité)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle **fonction de densité de probabilité sur I** toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.

$$f \textbf{ fonction densité} \text{ sur } I \iff \begin{cases} 1.\ \ f \text{ définie sur } I \\ 2.\ \ f \text{ continue sur } I \\ 3.\ \ f \text{ positive sur } I \\ 4.\ \ \displaystyle\int_I f = 1 \end{cases}$$

1. Soit f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 4x^3$. Montrer que f est une densité de probabilité sur $[0\ ;\ 1]$.
2. Soit g définie sur $[1\ ;\ +\infty]$ par $g(x) = \dfrac{k}{x^2}$. Déterminer k pour que g soit une densité de probabilité sur $[1\ ;\ +\infty]$.
3. Soit h définie sur $[0\ ;\ +\infty]$ par $h(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Montrer que h est une densité de probabilité sur $[0\ ;\ +\infty]$.

Exercice 2. Calculs de probabilités (c)

Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = 4x^3$$

Calculer :

1. $P(X = 1)$;
2. $P\left(X \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]\right)$;
3. $P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)$;
4. $P\left(\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)$;
5. $P_{\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 3. Calculs de probabilités (c)

Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $[0\ ;\ +\infty]$ par :

$$h(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

Calculer :

1. $P(X \in [1\,;\,2])$;
2. $P(X \in [1\,;\,+\infty[)$;
3. $P(X \in [0\,;\,+\infty[)$;
4. $P_{X\in[1\,;\,+\infty[}(X \in [1\,;\,2])$.

Exercice 4. Calculs d'espérances (c)

Définition 2 (Espérance Mathématiques)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle $[a;b]$, alors l'espérance mathématique de X est le réel

$$\boxed{E(X) = \int_a^b t \times f(t)\,\mathrm{d}t}$$

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X de densité f définie par $f(x) = 4x^3$ sur $[0\ ;\ 1]$.
2. Soit Y une variable aléatoire de densité de densité g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $[1\,;\,+\infty[$. Montrer que Y n'a pas d'espérance.

Deuxième partie
La loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$

Prérequis

Le **II - La loi uniforme sur** $[\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}]$ du cours disponible sur www.math93.com

Exercice 5. Exercices résolus : capacité 1

Capacité 1 : Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$.

1. Lire et faire l'exercice résolu 1 page 401.
2. Lire et faire l'exercice résolu 2 page 401.

Exercice 6. Loi uniforme et calculs

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[5\ ;\ 15]$.

1. Définir la fonction de densité de probabilité f de la loi de X.
2. Calculer $P(X < 10)$, $P(X < 13)$ et $P(10 < X < 13)$.
3. Calculer l'espérance de X
4. Déterminer u tel que $P(X < u) = 0,1$.

Réponses

(1.) $f(t) = \frac{1}{10}$ ***(2.)*** $P(X < 10) = 0,5$, $P(X < 13) = 0,8$ *et* $P(10 < X < 13) = 0,3$ ***(3.)*** $E(X) = 10$ ***(4.)*** $u = 6$

Exercice 7. (c) D'après Bac

Une agence de location de voitures dispose de trois types de véhicules : berline, utilitaire ou luxe, et propose, au moment de la location, une option d'assurance sans franchise.
Le temps d'attente au guichet de l'agence de location, exprimé en minutes, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\,;\ 20]$.

1. Quelle est la probabilité d'attendre plus de douze minutes ?
2. Préciser le temps d'attente moyen.

Exercice 8. D'après Bac

Les 275 passagers d'un vol long-courrier s'apprêtent à embarquer dans un avion possédant 55 sièges en classe confort et 220 sièges en classe économique.
Un passager du vol est choisi au hasard et on note T la durée (en minutes] qui s'est écoulée entre le début des enregistrements des bagages et l'arrivée de ce passager au comptoir d'enregistrement.
On admet que T est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 120]$.
Déterminer la probabilité que le passager choisi enregistre ses bagages dans les 30 dernières minutes autorisées.

Réponses
0,25

Exercice 9. D'après Bac

Pierre a pris rendez-vous dans une fabrique de jus de pomme artisanale. Il arrive au hasard entre 8 heures et 9 heures 30 minutes. Son heure d'arrivée est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [8 ; 9,5]. Déterminer la probabilité que Pierre arrive entre 8 h 30 et 8 h 45.

Réponses
$\dfrac{1}{6}$

Troisième partie

La loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\lambda\right)$

Prérequis

Le **III - La loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\boldsymbol{\lambda}\right)$** du cours disponible sur www.math93.com

Exercice 10. Exercices résolus : capacité 2

Capacité 2 : calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle.

1. Lire et faire l'exercice résolu 3 page 403.
2. Lire et faire l'exercice résolu 4 page 403.

Exercice 11. Un QCM (c)

Dans un couloir neigeux, on modélise l'intervalle de temps séparant deux avalanches successives, appelé temps d'occurrence d'une avalanche, exprimé en année, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle.
On a établi qu'une avalanche se déclenche en moyenne tous les 5 ans. Ainsi $E(T) = 5$.
La probabilité $P(T \geqslant 5)$ est égale à :

a. 0,5 **b.** $1 - \mathrm{e}^{-1}$ **c.** e^{-1} **d.** e^{-25}

Exercice 12. D'après bac Antilles 2019 (c)

Pour déterminer l'audience des chaînes de télévision, un institut de sondage recueille, au moyen de boîtiers individuels, des informations auprès de milliers de foyers français.
La durée de vie d'un boîtier individuel, exprimée en année, est modélisée par une variable aléatoire notée S qui suit une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif. On rappelle que la densité de probabilité de S est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

L'institut de sondage a constaté qu'un quart des boîtiers a une durée de vie comprise entre un et deux ans.
L'usine qui fabrique les boîtiers affirme que leur durée de vie moyenne est supérieure à trois ans.
L'affirmation de l'usine est-elle correcte ? La réponse devra être justifiée.

Exercice 13. D'après bac2018 : durée de vie sans vieillissement (c)

Les quinze jours précédant la rentrée universitaire, le standard téléphonique d'une mutuelle étudiante enregistre un nombre record d'appels.
Les appelants sont d'abord mis en attente et entendent une musique d'ambiance et un message préenregistré.
Lors de cette première phase, le temps d'attente, exprimé en secondes, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02\ \mathrm{s}^{-1}$.
Les appelants sont ensuite mis en relation avec un chargé de clientèle qui répond à leurs questions.
Le temps d'échange, exprimé en secondes, lors de cette deuxième phase est modélisé par la variable aléatoire Y, exprimée en secondes, qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 96$ s et d'écart-type $\sigma = 26$ s.

1. Quelle est la durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique (temps d'attente et temps d'échange avec le chargé de clientèle) ?

2. Un étudiant est choisi au hasard parmi les appelants du standard téléphonique.

2. a. Calculer la probabilité que l'étudiant soit mis en attente plus de 2 minutes.

2. b. Calculer la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes.

3. Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci.

Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?

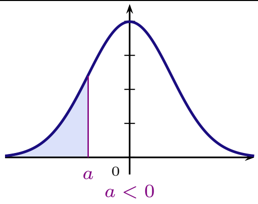
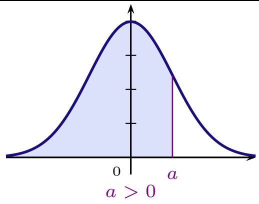
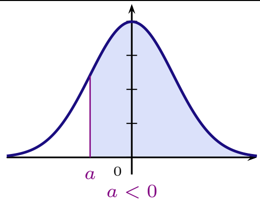
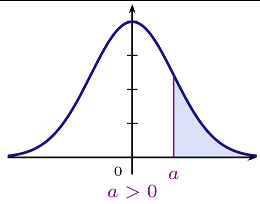
Quatrième partie

Les lois normales

Prérequis

Le **IV - Les lois normales** du cours disponible sur www.math93.com

Exercice 14. Loi normale centrée réduite

Probabilité	$P(X \leqslant a)$ avec $a<0$	$P(X \leqslant a)$ avec $a>0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a<0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a>0$
Graphique				
Calcul	$0,5-P(a<X<0)$	$0,5+P(0<X \leqslant a)$	$0,5+P(a \leqslant X<0)$	$0,5-P(0<X<a)$

	Sur TI 83	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche var (DISTR)	OPTN puis STAT DIST NORM
$P(a \leqslant X \leqslant b)$	`2:normalFrep`(a,b) ou `normalCdf`(a,b) borninf : a ; bornsup : b	Ncd `normCD`(a,b) Lower : a ; Upper : b
$P(X \leqslant k)=\alpha$	`3:FracNormale`(α) ou `invNorm`(α) aire : α	InvN `InvNormCD`(α) Area : α

La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type σ de la variable X.

2. Vérifier à l'aide de la calculatrice, qu'arrondi au millième on obtient :

2. a. $P(0<X<2) \approx 0,477$

2. b. $P(-2<X<0) \approx 0,477$

2. c. $P(0<X<1) \approx 0,341$

2. d. $P(-1<X<0) \approx 0,341$.

3. En déduire sans calculatrice, en appliquant les propriétés du cours que :

a. $P(X<1)$ **b.** $P(X>-1)$ **c.** $P(X<-2)$ **d.** $P(X>2)$.

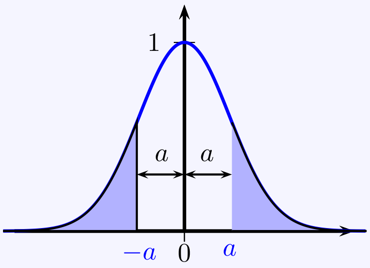
Réponses
$P(X<1) \approx 0,841$, $P(X>-1) \approx 0,841$, $P(X<-2) \approx 0,023$, $P(X>2) \approx 0,023$.

Exercice 15. Loi normale centrée réduite, inverse

Propriété 1

Soit X une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

1. La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Phi(t) = P(X \leqslant t)$.
2. Pour tout réel a on a :
   - $(1)\;:\;P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a)$
   - $(2)\;:\;\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
   - $(3)\;:\;P(-a \leqslant X \leqslant a) = 2\Phi(a) - 1$



La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

1. Déterminer a, b, c et d tels que :

   a. $P(X < a) = 0,3$ **b.** $P(X > b) = 0,8$ **c.** $P(X < c) = 0,1$ **d.** $P(X > d) = 0,4$.

2. Déterminer u tel que $P(-u < X < u) = 0,6$.
3. Déterminer v tel que $P(-2v < X < 2v) = 0,3$.
4. Déterminer w tel que $P\left(-\frac{w}{2} < X < \frac{w}{2}\right) = 0,4$.

Réponses
$a \approx -0,524$, $b \approx -0,841$, $c \approx -1,28$, $d \approx 0,253$, $u \approx 0,842$; $v \approx 0,193$ *et* $w \approx 1,049$

Exercice 16. Loi normale centrée réduite et évènements

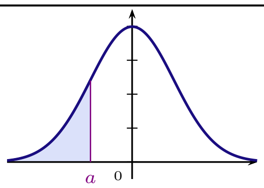
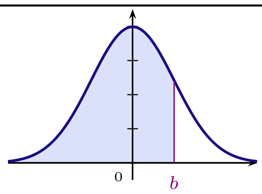
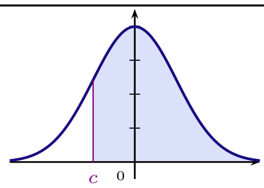
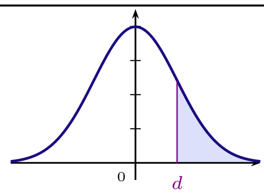
La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
On note A l'évènement :« $X > -0,3$ » et B l'évènement :« $X < 1$ » .
Calculer :

1. $P(A)$; 2. $P(B)$; 3. $P(A \cap B)$; 4. $P_A(B)$.

Réponses
$P(A) \approx 0,618$, $P(B) \approx 0,841$, $P(A \cap B) \approx 0,459$, $P_A(B) \approx 0,743$.

Exercice 17. Loi normale centrée réduite et courbes

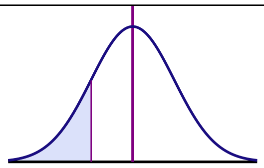
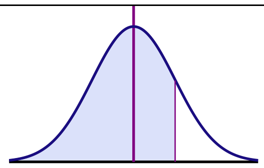
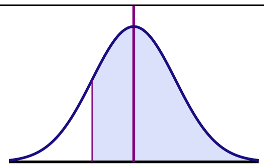
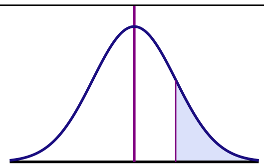
Voici les courbes représentatives de la fonction de densité de la loi de la variable X qui suit une loi normale centrée réduite.
On donne la valeur de l'aire colorée arrondie au millième, en déduire a, b, c et d.

Valeur de l'aire colorée	$\mathcal{A}_1 \approx 0,309$	$\mathcal{A}_2 \approx 0,655$	$\mathcal{A}_3 \approx 0,579$	$\mathcal{A}_4 \approx 0,212$
Graphique				
Calcul	$a = \ldots$	$b = \ldots$	$c = \ldots$	$d = \ldots$

Réponses
$a \approx -0.5$; $b \approx 0,4$; $c \approx -0,2$; $d \approx 0,8$.

Exercice 18. Loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$: compétences de base

	Sur TI 83	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche var (DISTR)	OPTN puis STAT DIST NORM
$P\left(a \leqslant X \leqslant b\right)$	`2:normalFrep`(a, b, μ, σ) ou `normalCdf`(a, b, μ, σ) borninf : a ; bornsup : b puis, renseigner μ et σ	Ncd `normCD` (a, b, σ, μ) Lower : a ; Upper : b puis, renseigner σ et μ
$P\left(X \leqslant k\right) = \alpha$	`3:FracNormale`(α, μ, σ) ou `invNorm`(α, μ, σ) aire : α puis, renseigner μ et σ	InvN `InvNormCD`(α, σ, μ) Area : α puis, renseigner σ et μ

Probabilité	$P\left(X \leqslant a\right)$ avec $a < \mu$	$P\left(X \leqslant a\right)$ avec $a > \mu$	$P\left(X \geqslant a\right)$ avec $a < \mu$	$P\left(X \geqslant a\right)$ avec $a > \mu$
Graphique	 a μ $a < \mu$	 μ a $a > \mu$	 a μ $a < \mu$	 μ a $a > \mu$
Calcul	$0,5 - P\left(a < X < \mu\right)$	$0,5 + P\left(\mu < X \leqslant a\right)$	$0,5 + P\left(a \leqslant X < \mu\right)$	$0,5 - P\left(\mu < X < a\right)$

La variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(100\ ;\ 25)$.

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type σ de la variable X.

2. Vérifier à l'aide de la calculatrice, qu'arrondi au millième on obtient :

2. a. $P(100 < X < 110) \approx 0,477$

2. b. $P(90 < X < 100) \approx 0,477$

2. c. $P(95 < X < 100) \approx 0,341$

2. d. $P(100 < X < 105) \approx 0,341.$

3. En déduire sans calculatrice, en appliquant les propriétés du cours :

a. $P(X < 110)$ **b.** $P(X > 90)$ **c.** $P(X < 95)$ **d.** $P(X > 105)$.

4. Déterminer a, b, c et d tels que :

a. $P(X < a) = 0,3$ **b.** $P(X > b) = 0,8$ **c.** $P(X < c) = 0,85$ **d.** $P(X > d) = 0,4$.

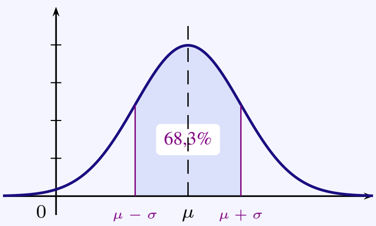
Réponses
(1.) $E(X) = 100$; $\sigma = 5$;
(3.) $P(X < 110) \approx 0,977$, $P(X > 90) \approx 0,977$, $P(X < 95) \approx 0,159$, $P(X > 105) \approx 0,159$
(4.) $a \approx 97,4$; $b \approx 95,8$; $c \approx 105$ *et* $d \approx 101$

Exercice 19. Loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ et propriété des 1σ, 2σ, 3σ

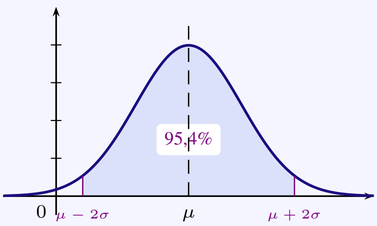
Propriété 2 (dite des « 1 σ, 2 σ, 3 σ »)

Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ alors :

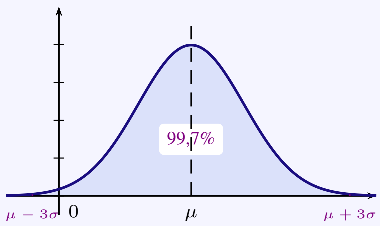
- $P\left(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma\right) \approx 0,683.$
- $P\left(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma\right) \approx 0,954.$
- $P\left(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma\right) \approx 0,997.$



$X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]$



$X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$



$X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$

1. Soit la variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne 225 et d'écart-type σ_1.
Déterminer σ_1 sachant que : $P(215 \leqslant X \leqslant 235) \approx 0,683$.

2. Soit la variable aléatoire Y qui suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type σ_2.
Déterminer σ_2 sachant que : $P(40 \leqslant Y \leqslant 60) \approx 0,954$.

3. Soit la variable aléatoire Y qui suit la loi normale de moyenne 7 et d'écart-type σ_3.
Déterminer σ_3 sachant que : $P(4 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0,997$.

Réponses
$\sigma_1 = 10\ ;\ \sigma_2 = 5\ ;\ \sigma_3 = 1$

Exercice 20. (c) Loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$: utilisation d'un changement de variable

Définition 3

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, signifie que la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. On note : X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$.

$$\boxed{X \backsim \mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right) \iff Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \backsim \mathcal{N}(0\ ;\ 1)}$$

1. La variable aléatoire X_1 suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 100$ et d'écart-type $\sigma_1 = 5$.
Déterminer un intervalle I de centre $\mu_1 = 100$ tel que $P(X_1 \in I) = 0,75$.

Remarque
L'intervalle I est de la forme $[100 - a\ ;\ 100 + a]$ donc on cherche un réel a tel que :

$$P(100 - a < X_1 < 100 + a) = 0,75$$

2. La variable aléatoire X_2 suit la loi normale de moyenne 35 et d'écart-type σ_2.
Déterminer σ_2 sachant que $P(X_2 < 37) \approx 0,748$, (arrondir à l'unité).

3. La variable aléatoire X_3 suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart-type σ_3.
Déterminer σ_3 sachant que $P(200 < X_3 < 300) = 0,789$, (arrondir au dixième).

Réponses
$a \approx 5,752$, $\sigma_2 \approx 3$ *et* $\sigma_3 \approx 40$

Cinquième partie

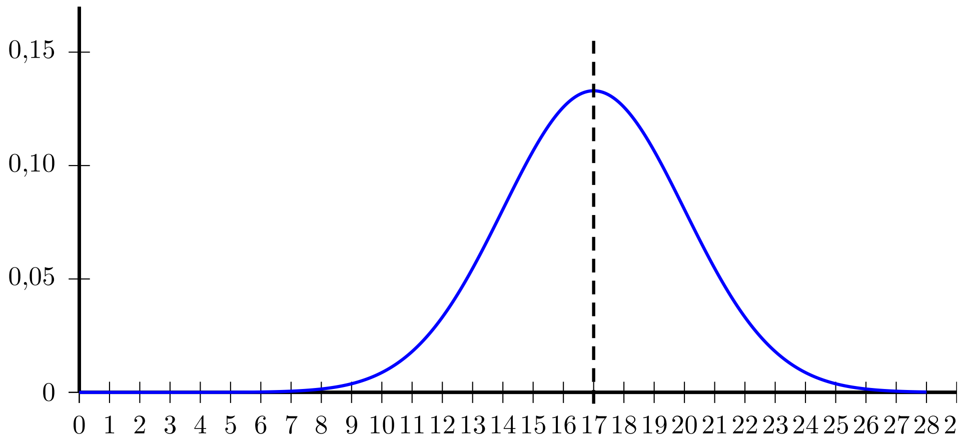
Compléments et exercices du Bac

Exercice 21. D'après Baccalauréat S métropole, juin 2019

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

Partie A

Les durées des parties de type A et de type B, exprimées en minutes, peuvent être modélisées respectivement par deux variables aléatoires X_A et X_B.
La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9\ ;\ 25]$
La variable aléatoire X_B suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type 3. La représentation graphique de la fonction de densité de cette loi normale et son axe de symétrie sont donnés ci-dessous.



1. **1. a.** Calculer la durée moyenne d'une partie de type A.
   1. b. Préciser à l'aide du graphique la durée moyenne d'une partie de type B.
2. On choisit au hasard, de manière équiprobable, un type de jeu. Quelle est la probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes ? On donner le résultat arrondi au centième.

Réponses
Le corrigé complet sur www.math93.com. Exercice 2

Exercice 22. D'après Baccalauréat S Amérique du Nord 28 mai 2019

Dans cet exercice et sauf mention contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Une usine fabrique des tubes.

Partie A

Les questions **1.** *et* **2.** *sont indépendantes.*

On s'intéresse à deux types de tubes, appelés tubes de type 1 et tubes de type 2.

1. Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre $1,35$ millimètre et $1,65$ millimètre.
   1. a. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $1,5$ et d'écart-type $0,07$.

   On prélève au hasard un tube de type 1 dans la production de la journée. Calculer la probabilité que le tube soit accepté au contrôle.

1. b. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des tubes de type 1. Pour cela, on modifie le réglage des machines produisant ces tubes. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé dans la production issue de la machine modifiée, associe son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance $1,5$ et d'écart-type σ_1.

Un tube de type 1 est prélevé au hasard dans la production issue de la machine modifiée. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à 0,98. (On pourra utiliser la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X_1 - 1,5}{\sigma_1}$ qui suit la loi normale centrée réduite.)

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com. Exercice 1

Exercice 23. D'après Baccalauréat S - Nouvelle Calédonie, novembre 2019 (c)

On modélise l'épaisseur en millimètre d'un carreau pris au hasard par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart type σ.
Un carreau est commercialisable si son épaisseur mesure entre $10,1$ mm et $11,9$ mm.
On sait que 99 % des carreaux sont commercialisables.

1. Démontrer que $P(X < 10,1) = 0,005$.

2. On introduit la variable aléatoire Z telle que

$$Z = \frac{X - 11}{\sigma}.$$

2. a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire Z.

2. b. Démontrer que $P\left(Z \leqslant -\frac{0,9}{\sigma}\right) = 0,005$.

2. c. En déduire la valeur de σ arrondie au centième.

Exercice 24. D'après S Pondichéry, Avril 2017

Un marathon est une épreuve sportive de course à pied. Dans cet exercice, tous les résultats approchés seront donnés à 10^{-3} près. On suppose que le temps en minutes mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 39$.

1. Calculer $P(210 \leqslant T \leqslant 270)$.

2. Un coureur est choisi au hasard parmi les coureurs qui ont mis entre 210 minutes et 270 minutes pour finir le marathon.
Calculer la probabilité que ce coureur ait terminé la course en moins de 240 minutes.

3.

3. a. Calculer $P(T \leqslant 300)$.

3. b. Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel t, arrondi à l'unité,
vérifiant $P(T \geqslant t) = 0,9$.

3. c. Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

Réponses
(1.) 0,543 ; (2.) 0,453 ; (3.a.) 0,9 ; (3.b.) t $\approx$ 200
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Exercice 25. (c) D'après bac

Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale de moyenne $40,5$
et d'écart type 12. *Dans cet exercice, les résultats seront donnés à* 10^{-3} *près.*

1. Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.

2. Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.

Réponses
0,133 et 0,113

Exercice 26. D'après Baccalauréat S - Asie 20 juin 2019 (c)

Partie C

Pour promouvoir les produits bio de son enseigne, le responsable d'un magasin décide d'organiser un jeu qui consiste, pour un client, à remplir un panier avec une certaine masse d'abricots issus de l'agriculture biologique. Il est annoncé que le client gagne le contenu du panier si la masse d'abricots déposés est comprise entre $3,2$ et $3,5$ kilogrammes.
La masse de fruits en kg, mis dans le panier par les clients, peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité de densité f définie sur l'intervalle [3 ; 4] par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-2)^2}.$$

Rappel : on appelle fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ toute fonction f définie, continue et positive sur $[a\ ;\ b]$, telle que l'intégrale de f sur $[a\ ;\ b]$ est égale à 1.

1. Vérifier que la fonction f précédemment définie est bien une fonction de densité d'une loi de probabilité sur l'intervalle [3 ; 4].

2. Le magasin annonce : « Un client sur trois gagne le panier ! ».
Cette annonce est-elle exacte ?

3. Cette question a pour but de calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
On rappelle que, pour une variable aléatoire X de densité f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, $\mathrm{E}(X)$ est donnée par : $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$.

3. a. Vérifier que la fonction G, définie sur l'intervalle [3 ; 4] par $G(x) = \ln(x-2) - \dfrac{x}{x-2}$, est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{(x-2)^2}$ sur cet intervalle.

3. b. En déduire la valeur exacte de $\mathrm{E}(X)$, puis sa valeur arrondie au centième.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 27. D'après bac ES

À l'occasion de la fête des Mères, un fleuriste décide de proposer à ses clients plusieurs types de bouquets spéciaux. L'un des fournisseurs du fleuriste est un jardinier spécialisé dans la production d'une espèce de rosiers nommée « Arlequin ».
On note X la variable aléatoire qui, à chaque rosier de cette espèce pris au hasard, cultivé chez ce jardinier, associe sa hauteur exprimée en centimètres. On admet, d'après les observations et mesures réalisées, que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

1. On choisit au hasard un rosier « Arlequin » chez ce fournisseur.

1. a. Déterminer la probabilité que ce rosier mesure entre 47 et 53 centimètres.

1. b. Déterminer la probabilité que ce rosier mesure plus de 56 centimètres.

2. Le fournisseur veut prévoir quelle sera la hauteur atteinte ou dépassée par 80 % de ses rosiers « Arlequin ».
Déterminer la hauteur cherchée (on l'arrondira au mm).

Réponses
(1.a.) 0,683 ; (1.b.) 0,023 ; (2.) 0,9 k $\approx 47,5$. *Le corrigé détaillé sur www.math93.com*

Exercice 28. (c) D'après bac

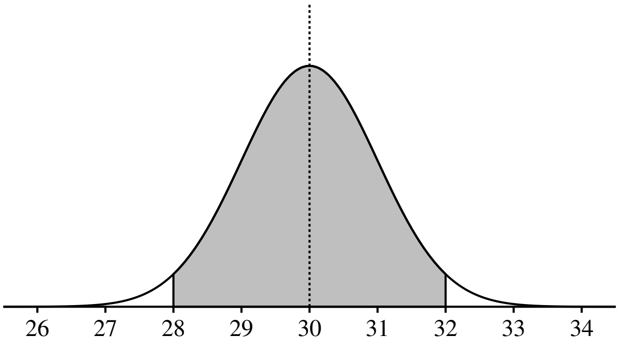
Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.
Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en Mo/s, appartient à l'intervalle $[98\,;\,103]$.
Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en Mo/s appartient à l'intervalle $[28\,;\,33]$.

1. On note R la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

Calculer la probabilité qu'une clé soit conforme pour la lecture.

2. On note W la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d"écriture On suppose que la variable aléatoire W suit une loi normale.

Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire W.



L'unité d'aire est choisie de façon à ce que l'aire sous la courbe soit égale à un et l'aire grisée est environ égale à 0,95 unité d'aire. La droite d'équation $x = 30$ est un axe de symétrie de la courbe.

Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire W. Justifier.

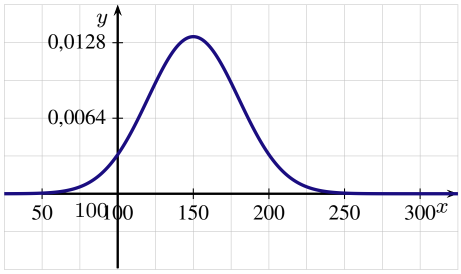
Réponses
(1.) 0,976 ; (2.) $\mu = 30$ *et* $\sigma = 1$

Exercice 29. D'après bac ES

On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

Partie A. Étude de la zone 1

On note X la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.
Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 30$. La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.



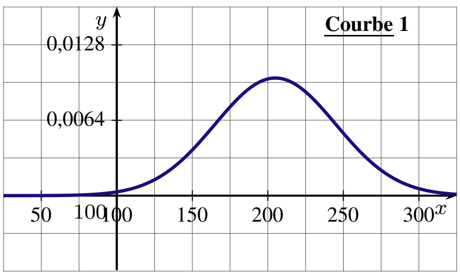
1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ.
2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.
3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.

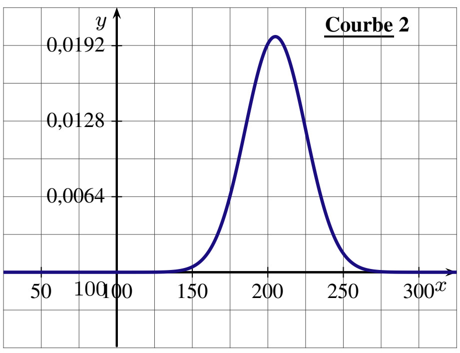
   On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, de pêcher un poisson adulte.
4. On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ.

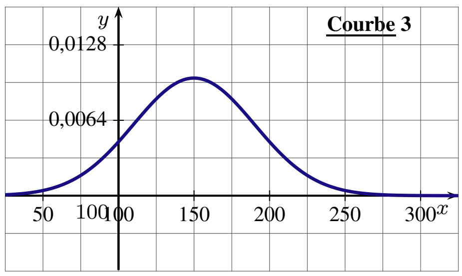
   Est-il vrai que $P(X < k) < 0,5$? Justifier.

Partie B. Étude de la zone 2

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$.
En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$, dire laquelle des trois courbes ci-dessous représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Justifier la réponse.







Réponses
(1.) 150 ; (2.) 0,48 ; (3.) 0,84 ; (4.) Faux ; (B.) Courbe 1
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Sixième partie

Corrections

Corrections : Des lois continues

Correction de l'exercice 1

1. **Soit f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 4x^3$. Montrer que f est une densité de probabilité sur $[0\ ;\ 1]$.**
La fonction f est continue et positive sur $[0\ ;\ 1]$. De plus :

$$\int_0^1 4x^3\,\mathrm{d}x = \left[\ x^4\ \right]_0^1 = 1$$

f est bien une densité de probabilité sur $[0\ ;\ 1]$.

2. **Soit g définie sur $[1\ ;\ +\infty]$ par $g(x) = \dfrac{k}{x^2}$. Déterminer k pour que g soit une densité de probabilité sur $[1\ ;\ +\infty]$.**
   - Puisque pour tout réel $x \in [1\ ;\ +\infty]$, on a $x^2 > 0$, il est nécessaire que k soit positif pour que g le soit sur $[1\ ;\ +\infty]$.
   - g est continue sur $[1\ ;\ +\infty]$.
   - Pour tout réel t, avec $t \geqslant 1$ on a :
   $$\int_1^t \frac{k}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ -\frac{k}{x}\ \right]_1^t = k - \frac{k}{t}$$
   - Or :
   $$\lim_{t\to+\infty} k - \frac{k}{t} = k$$
   d'où
   $$\int_1^t \frac{k}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 \iff k = 1$$

3. **Soit h définie sur $[0\ ;\ +\infty]$ par $h(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Montrer que h est une densité de probabilité sur $[0\ ;\ +\infty]$.**
La fonction h est continue et positive sur $[0\ ;\ +\infty]$. De plus pour $t > 0$:

$$\int_0^t 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ -\mathrm{e}^{-x^2}\ \right]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-t^2}$$

Or :

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -t^2 = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{cases} \implies \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} = 0$$

De ce fait :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

h est bien une densité de probabilité sur $[0\ ;\ +\infty]$.

Correction de l'exercice 2

Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = 4x^3$$

Calculer :

1. **$P(X = 1)$;**

$$P(X = 1) = \int_1^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

2. $\boldsymbol{P\left(X \in \left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]\right)}$;

$$P\left(X \in \left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ \ x^4\ \ \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{15}{16}$$

3. $\boldsymbol{P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)}$;

$$P\left(X \in \left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]\right) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ \ x^4\ \ \right]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{16}$$

4. $\boldsymbol{P\left(\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)}$.

$$P\left(X \in \left[\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\right]\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ \ x^4\ \ \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{69}{1296}$$

5. $\boldsymbol{P_{\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)}$.

On applique la formule de Bayes sachant que :

$$\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} P_{\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right) &= \frac{P\left(\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)\right)}{P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{P\left(\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)}{P\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{69/1296}{1/16} = \frac{23}{27} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3

Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $[0\,;\,+\infty]$ par :

$$h(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

Calculer :

1. $\boldsymbol{P(X \in [1\,;\,2])}$;

$$P(X \in [1\,;\,2]) = \int_1^2 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ \ -\mathrm{e}^{-x^2}\ \ \right]_1^2 = -\mathrm{e}^{-4} + \mathrm{e}^{-1}$$

2. $\boldsymbol{P(X \in [1\,;\,+\infty[)}$;

Pour $t > 1$:

$$\int_1^t 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ \ -\mathrm{e}^{-x^2}\ \ \right]_1^t = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-t^2}$$

Or :

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} -t^2 = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t^2} = 0$$

De ce fait :

$$\boxed{P(X \in [1\,;\,+\infty[) = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1}}$$

Remarque :
On pouvait aussi écrire que :

$$P(X \in [1\,;\,+\infty[) = 1 - P(X \in [0\,;\,1[) = 1 - \int_0^1 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

3. $\boldsymbol{P(X \in [0\,;\,+\infty[)}$;
$P(X \in [0\,;\,+\infty[) = 1$ car f est une densité de probabilité sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. $\boldsymbol{P_{X\in[1\,;\,+\infty[}(X \in [1\,;\,2])}$;
On applique la formule de Bayes sachant que :

$$(X \in [1\,;\,+\infty[) \cap (X \in [1\,;\,2]) = (X \in [1\,;\,2])$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} P_{X\in[1\,;\,+\infty[}(X \in [1\,;\,2]) &= \frac{P((X \in [1\,;\,+\infty[) \cap (X \in [1\,;\,2]))}{P(X \in [1\,;\,+\infty[)} \\ &= \frac{P(X \in [1\,;\,2])}{P(X \in [1\,;\,+\infty[)} \\ &= \frac{-\mathrm{e}^{-4} + \mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^{-1}} \\ &= \underline{1 - \mathrm{e}^{-3}} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4

Corrections : Loi Uniforme

Correction de l'exercice 7

Le temps d'attente au guichet de l'agence de location, exprimé en minutes, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\ ;\ 20]$.

Propriété 3

Soit X la variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle [a ; b].

$$\boxed{\forall x \in [a\ ;\ b]\ ;\ P(a \leqslant X \leqslant x) = \frac{x-a}{b-a} \quad : \quad (1)} \quad \text{et} \quad \boxed{E(X) = \frac{b+a}{2} \quad : \quad (2)}$$

1. **Quelle est la probabilité d'attendre plus de douze minutes ?**
La probabilité d'attendre plus de 12 minutes est :

$$P(T \geqslant 12) = P(12 \leqslant T \leqslant 20) = \frac{20-12}{20-1} = \frac{8}{19} \approx \underline{0,42}$$

2. **Préciser le temps d'attente moyen.**
Le temps d'attente moyen est $\dfrac{1+20}{2} = \underline{10,5\,\text{min}}$.

Corrections : Loi exponentielle

Correction de l'exercice 11 : Centres étrangers 2019

Propriété 4

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$:

$$P(a \leqslant T \leqslant b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T \leqslant b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Donc ici :

$$E(T) = 5 = \frac{1}{\lambda} \iff \lambda = 0,2$$

Et donc

$$P(T \geqslant 5) = \mathrm{e}^{-\lambda a} = \mathrm{e}^{-0,2\times 5} = \underline{\mathrm{e}^{-1}}$$

Correction de l'exercice 12

La durée de vie d'un boîtier individuel, exprimée en année, est modélisée par une variable aléatoire notée S qui suit une loi exponentielle de paramètre λ strictement positif. On rappelle que la densité de probabilité de S est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$. L'institut de sondage a constaté qu'un quart des boîtiers a une durée de vie comprise entre un et deux ans. L'usine qui fabrique les boîtiers affirme que leur durée de vie moyenne est supérieure à trois ans. L'affirmation de l'usine est-elle correcte ? La réponse devra être justifiée.

Propriété 5

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$:

$$P(a \leqslant T \leqslant b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T \leqslant b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

L'institut de sondage a constaté qu'un quart des boîtiers a une durée de vie comprise entre un et deux ans. Donc en posant $X = \mathrm{e}^{\lambda}$:

$$\begin{cases} P(1 \leqslant S \leqslant 2) = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda} = 0,25 \\ X = \mathrm{e}^{\lambda} \end{cases} \Longrightarrow X - X^2 - 0,25 = 0$$

L'expression $\left(-1X^2 + \ 1X \ -0{,}25\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(aX^2 + bX + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l|} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -0.25 \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta = 0$$

Le discriminant Δ étant nul, la fonction polynôme du second degré $X \longmapsto \left(-1X^2 + \ 1X \ -0{,}25\right)$ admet une unique racine réelle :

$$X_1 = \frac{-1}{-2} = 0.5$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = 0,5 \iff \lambda = -\ln 0,5 \iff \lambda = \ln 2$$

La durée de vie moyenne des boîtiers est

$$E(S) = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,44 < 3$$

L'affirmation de l'usine est fausse.

Correction de l'exercice 13 (durée de vie sans vieillissement)

1. **Quelle est la durée totale moyenne d'un appel ?**

   Le temps d'attente en seconde est modélisé par la variable X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02\ \mathrm{s}^{-1}$.

   Propriété 6

   Soit λ un réel strictement positif.
   Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$:

   $$P\left(a \leqslant T \leqslant b\right) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

   et donc

   $$P\left(T \leqslant b\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P\left(T \geqslant a\right) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

   En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

   Donc le temps d'attente moyen est :

   $$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 50\ \mathrm{s}$$

   - Y qui modélise le temps d'échange suit $\mathcal{N}\left(\mu = 96\ ;\ \sigma^2 = 26^2\right)$ donc le temps d'échange moyen est :

   $$E(Y) = \mu = 96\ \mathrm{s}$$

   - La durée totale moyenne d'un appel est donc de :

   $$\underline{E(X) + E(Y) = 146\ \mathrm{s} = 2\ \mathrm{min}\ 26\ \mathrm{s}}$$

2.

   2. a. Calculer la probabilité qu'il attende plus de 2 minutes.

   On a :

   $$P\left(X > 120\ \mathrm{s}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda \times 120} = \underline{\mathrm{e}^{-2,4} \approx 0.0907}$$

   2. b. Calculer la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes.

   On cherche $P(Y < 90)$ et la calculatrice donne : $\underline{P(Y < 90) \approx 0,409}$.

3. **Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci. Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?**

   Propriété 7 (Durée de vie sans vieillissement)

   Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h :

   $$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$$

   Cette propriété traduit le fait que la loi exponentielle est « sans mémoire ».

   D'après la propriété dite de « *durée de vie sans vieillissement* », la probabilité d'attendre moins de 60s + 30s, sachant que l'on a déjà attendu plus d'une minute est égale à celle d'attendre moins de 30s. Le fait de raccrocher ne change rien avec cette modélisation.

   $$P_{X>60}(X < 60 + 30) = 1 - P_{X>60}(X > 60 + 30)$$

   On applique alors la propriété dite de « *durée de vie sans vieillissement* »

   $$\begin{aligned} P_{X>60}(X < 60 + 30) &= 1 - P(X > 30) \\ &= \underline{P(X \leqslant 30)} \end{aligned}$$

Corrections : Lois Normales

Correction de l'exercice 20

1. **La variable aléatoire X_1 suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 100$ et d'écart-type $\sigma_1 = 5$. Déterminer un intervalle I de centre $\mu_1 = 100$ tel que $P(X_1 \in I) = 0,75$.**
L'intervalle I est de la forme $[100 - a\,;\ 100 + a]$ donc on cherche un réel a tel que :

$$P(100 - a < X_1 < 100 + a) = 0,75$$

Or on a en soustrayant par $\mu_1 = 100$ chaque terme et en divisant par l'écart-type $\sigma_1 = 5$:

$$\begin{aligned} P(100 - a < X_1 < 100 + a) = 0,75 &\iff P\left(\frac{100-a-100}{5} < \frac{X_1 - 100}{5} < \frac{100+a-100}{5}\right) = 0,75 \\ &\iff P\left(-\frac{a}{5} < \frac{X_1-100}{5} < \frac{a}{5}\right) = 0,75 \end{aligned}$$

Or par définition :

$$X_1 \backsim \mathcal{N}\left(\mu\,;\ \sigma^2\right) \iff Y_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} \backsim \mathcal{N}(0\,;\ 1)$$

En outre :

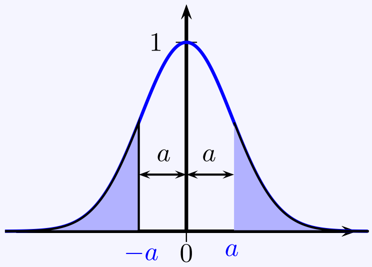
Propriété 8

Soit X une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\ 1)$.

1. a. La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Phi(t) = P(X \leqslant t)$.

1. b. Pour tout réel a on a :

- $(1)\ :\ P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a)$
- $(2)\ :\ \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- $(3)\ :\ P(-a \leqslant X \leqslant a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait, d'après la propriété 11 :

$$\begin{aligned} P(100 - a < X_1 < 100 + a) = 0,75 &\iff P\left(-\frac{a}{5} < Y_1 < \frac{a}{5}\right) = 0,75 \quad \text{où } Y_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \backsim \mathcal{N}(0\,;\ 1) \\ &\iff 2\Phi\left(\frac{a}{5}\right) - 1 = 0,75 \\ &\iff \Phi\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{1+0,75}{2} \end{aligned}$$

La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-3} près :

$$\Phi\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{1+0,75}{2} \iff \frac{a}{5} \approx 1,150$$

Donc $a \approx 5,752$ et l'intervalle cherché est donc :

$$\boxed{I = [100 - a\,;\ 100 + a] \approx [94,25\,;\ 105,75]}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.75\ ,\ 0\ ,\ 1) \approx \underline{1{,}150}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0.75\ ,\ 0\ ,\ 1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0.75\ ,\ 0\ ,\ 1)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0.75\ ,\ 1\ ,\ 0)$

2. **La variable aléatoire X_2 suit la loi normale de moyenne 35 et d'écart-type σ_2.**
Déterminer σ_2 sachant que $P(X_2 < 37) \approx 0,748$.
On cherche l'écart-type σ_2 tel que : $P(X_2 < 37) \approx 0,748$ quand X_2 suit la loi normale de moyenne 35 et d'écart-type σ_2.
Or on a en soustrayant par $\mu_2 = 35$ chaque terme et en divisant par l'écart-type $\sigma_2 > 0$:

$$P(X_2 < 37) \approx 0,748 \iff P\left(\frac{X_2 - 35}{\sigma_2} < \frac{37-35}{\sigma_2}\right) \approx 0,748$$
$$\iff P\left(\frac{X_2 - 35}{\sigma_2} < \frac{2}{\sigma_2}\right) \approx 0,748$$

Or par définition :

$$X_2 \backsim \mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right) \iff Y_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} \backsim \mathcal{N}(0\,;\,1)$$

En outre :

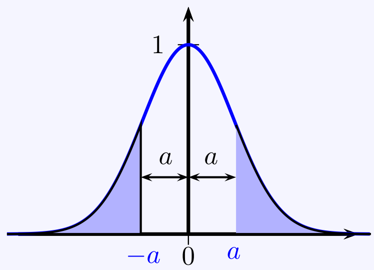
Propriété 9

Soit X une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

2. a. La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Phi(t) = P(X \leqslant t)$.

2. b. Pour tout réel a on a :

- $(1)\ :\ P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a)$
- $(2)\ :\ \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
- $(3)\ :\ P(-a \leqslant X \leqslant a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait, d'après la propriété 11 :

$$P\left(\frac{X_2 - 35}{\sigma_2} < \frac{2}{\sigma_2}\right) \approx 0,748 \iff P\left(Y_2 < \frac{2}{\sigma_2}\right) = 0,748 \quad \text{où } Y_2 = \frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2} \backsim \mathcal{N}(0\,;\,1)$$
$$\iff \Phi\left(\frac{2}{\sigma_2}\right) = 0,748$$

La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-3} près :

$$\Phi\left(\frac{2}{\sigma_2}\right) = 0,748 \iff \frac{2}{\sigma_2} \approx 0,668 \iff \sigma_2 \approx \frac{2}{0,668} \approx 3$$

Donc $\underline{\sigma_2 \approx 3}$.

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.748\ ,\ 0\ ,\ 1) \approx \underline{0{,}668}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0.748\ ,\ 0\ ,\ 1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0.748\ ,\ 0\ ,\ 1)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0.748\ ,\ 1\ ,\ 0)$

3. **La variable aléatoire X_3 suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart-type σ_3.**
   Déterminer σ_3 sachant que $P(200 < X_3 < 300) = 0,789$.

Propriété 10

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire X_3 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma_3^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Y_3 = \dfrac{X_3-\mu}{\sigma_3}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Donc ici, puisque X_3 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(250\ ;\ \sigma_3^2\right)$, la v.a. $Y_3 = \dfrac{X_3-250}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.
On cherche ici une valeur approchée à 10^{-1} de σ_3 sachant que $P(200 \leqslant X_3 \leqslant 300) = 0,789$, or :

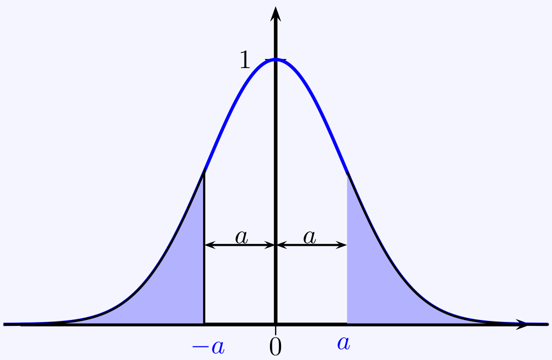
$$\begin{aligned} P(200 \leqslant X_3 \leqslant 300) = 0,789 &\iff P\left(\frac{200-250}{\sigma_3} \leqslant \frac{X_3-250}{\sigma_3} \leqslant \frac{300-250}{\sigma_3}\right) = 0,789 \\ &\iff P\left(\frac{-50}{\sigma_3} \leqslant Y_3 \leqslant \frac{50}{\sigma_3}\right) = 0,789 \end{aligned}$$

Or la v.a. Z suit la loi normale centrée réduite et on rappelle que :

Propriété 11

Soit Y_3 une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

- La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = P(Y_3 \leqslant t)$.
- Pour tout réel a on a :
  - $(1)\ :\ P(Y_3 \leqslant -a) = P(Y_3 \geqslant a)$
  - $(2)\ :\ \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
  - $(3)\ :\ P(-a \leqslant Y_3 \leqslant a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait en appliquant la relation (3) de la propriété 11 :

$$\begin{aligned} P(200 \leqslant X_3 \leqslant 300) = 0,789 &\iff P\left(\frac{-50}{\sigma_3} \leqslant Y_3 \leqslant \frac{50}{\sigma_3}\right) = 0,789 \\ &\iff 2\Phi\left(\frac{50}{\sigma_3}\right) - 1 = 0,789 \\ &\iff \Phi\left(\frac{50}{\sigma_3}\right) = \frac{0,789+1}{2} = 0{,}8945 \\ &\iff P\left(Y_3 \leqslant \frac{50}{\sigma_3}\right) = 0{,}8945 \end{aligned}$$

La calculatrice nous donne alors avec la fonction répartition normale réciproque :

$$Y_3 \sim \mathcal{N}(0\ ;\ 1) \Longrightarrow \frac{50}{\sigma_3} \approx 1{,}250\,82$$

Soit arrondi à 10^{-1} près :

$$\boxed{\sigma_3 \approx 40{,}0}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0{,}8945\ ,\ 0\ ,\ 1) \approx \underline{1{,}250\,82}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0{,}8945\ ,\ 0\ ,\ 1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0{,}8945\ ,\ 0\ ,\ 1)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0{,}8945\ ,\ 1\ ,\ 0)$

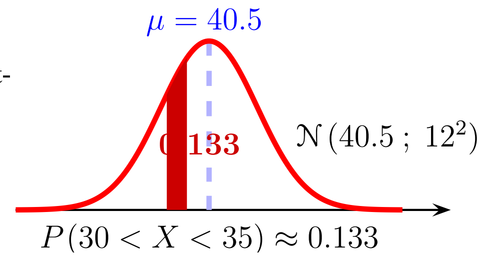
Correction de l'exercice 25

Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale de moyenne $40,5$ et d'écart type 12.

1. **Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.**

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 40.5$ et d'écart-type $\sigma = 12$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(40.5\ ;\ 12^2\right) \Longrightarrow P\left(30 < X < 35\right) \approx \underline{0{,}133}$$



> *Calculatrices*
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(30\ ,\ 35\ ,\ 40.5\ ,\ 12) \approx \underline{0{,}132\,570}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(30\ ,\ 35\ ,\ 40.5\ ,\ 12)$ *ou (fr.) normalfrép*$(30\ ,\ 35\ ,\ 40.5\ ,\ 12)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(30\ ,\ 35,\ 12\ ,\ 40.5\ )$

2. **Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans**.

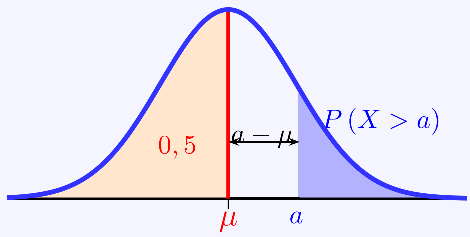
Propriété 12 ($P\left(X > a\right)\ ;\ a > \mu$)

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P\left(X > a\right) = 0,5 - P\left(\mu < X < a\right)}$$



On cherche ici $P\left(X \geqslant 55\right)$ or d'après la propriété on a :

$$P\left(X \geqslant 55\right) = 0,5 - P(40,5 < X < 55) \approx 0,113$$

la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans est d'environ $\underline{0{,}113}$.

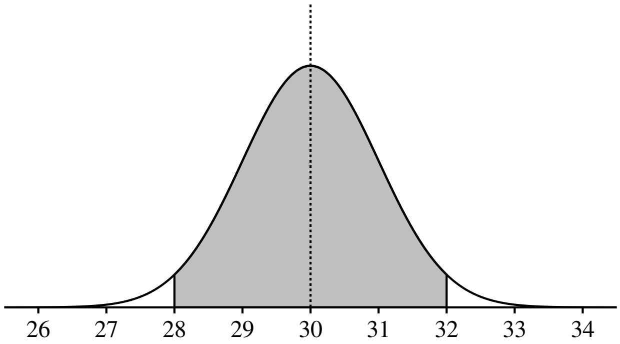
> *Calculatrices*
> - *Sur la TI Voyage 200 :* $\Big(0,5-$ *TIStat.normFDR*$(40,5\ ,\ 55\ ,\ 40.5\ ,\ 12)\ \Big) \approx \underline{0{,}113\,460}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(40,5\ ,\ 55\ ,\ 40.5\ ,\ 12)$ *ou (fr.) normalfrép*$(40,5\ ,\ 55\ ,\ 40.5\ ,\ 12)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(40,5\ ,\ 55,\ 12\ ,\ 40.5\ )$

Correction de l'exercice 28

Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en Mo/s, appartient à l'intervalle $[98\,;\,103]$. Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en Mo/s appartient à l'intervalle $[28\,;\,33]$.

1. **On note R la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Calculer la probabilité qu'une clé soit conforme pour la lecture.**
Une clé est conforme pour la lecture quand $98 \leqslant R \leqslant 103$, sachant que la variable aléatoire R suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma = 1$.
La calculatrice donne $p(98 \leqslant X \leqslant 103) \approx \underline{0,976}$.

2. **On note W la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d"écriture On suppose que la variable aléatoire W suit une loi normale. Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire W.**



L'unité d'aire est choisie de fa-0.25con à ce que l'aire sous la courbe soit égale à un et l'aire grisée est environ égale à 0,95 unité d'aire. La droite d'équation $x = 30$ est un axe de symétrie de la courbe. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire W. Justifier.

La fonction densité d'une loi normale d'espérance μ est représentée par une courbe en cloche dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \mu$. On sait que la droite d'équation $x = 30$ est axe de symétrie donc on peut en déduire que $\underline{\mu = 30}$.

D'après le cours, pour toute variable aléatoire W suivant une loi normale de paramètres μ et σ, on sait que :

$$p(\mu - 2\sigma \leqslant W \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

D'après le texte, $p(28 \leqslant W \leqslant 32) \approx 0,95$ et on sait que $\mu = 30$;

$$\begin{cases} p(30 - 2\sigma \leqslant W \leqslant 30 + 2\sigma) \approx 0,95 \\ p(28 \leqslant W \leqslant 32) \approx 0,95 \end{cases} \Bigg| \Longrightarrow \underline{\sigma = 1}$$

Corrections : compléments et exercices du Bac

Correction de l'exercice 26

Cette question a pour but de calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

On rappelle que, pour une variable aléatoire X de densité f sur l'intervalle $[a ; b]$, $\mathrm{E}(X)$ est donnée par : $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

1. **Vérifier que la fonction G, définie sur l'intervalle $[3 ; 4]$ par $G(x) = \ln(x - 2) - \dfrac{x}{x - 2}$, est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{(x - 2)^2}$ sur cet intervalle.**

   Soit $G(x) = \ln(x - 2) - \dfrac{x}{x - 2}$.

   On sait que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ donc pour $x \in [3 ; 4]$ on a :

   $$G'(x) = \frac{1}{x - 2} - \frac{1 \times (x - 2) - 1 \times x}{(x - 2)^2} = \frac{1}{x - 2} + \frac{2}{(x - 2)^2} = \frac{1(x - 2) + 2}{(x - 2)^2} = \frac{x}{(x - 2)^2}$$

   G est bien une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{(x - 2)^2}$.

2. **En déduire la valeur exacte de $\mathrm{E}(X)$, puis sa valeur arrondie au centième. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

   On a :

   $$E(X) = \int_3^4 xf(x)\,\mathrm{d}x = [2G(x)]_3^4 = 2\,[G(4) - G(3)]$$

   et $G(4) = \ln 2 - 2$; $G(3) = -3$ donc

   $$E(X) = 2(1 + \ln 2) \approx 3,39$$

et

$$\boxed{E(X) = 2(1 + \ln 2) \approx 3,39}$$

En moyenne, la masse du panier déposé par les clients est environ égale à 3,39 kg.

Correction de l'exercice 23

On modélise l'épaisseur en millimètre d'un carreau pris au hasard par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart type σ.
Un carreau est commercialisable si son épaisseur mesure entre $10,1$ mm et $11,9$ mm.
On sait que 99 % des carreaux sont commercialisables.

1. **Démontrer que $P(X < 10,1) = 0,005$.**

   - Un carreau est commercialisable si son épaisseur X mesure entre $10,1$ mm et $11,9$ mm. Par ailleurs, X suit une loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart type σ.
   - On sait que 99 % des carreaux sont commercialisables. On a donc

   $$P(10,1 \leqslant X \leqslant 11,9) = 0,99$$

   donc en passant à l'évènement contraire :

   $$P(X \leqslant 10,1) + P(X \geqslant 11,9) = 1 - 0,99 = 0,01$$

   Mais par symétrie $P(X \leqslant 10,1) = P(X \geqslant 11,9)$, donc

   $$\boxed{P(X \leqslant 10,1) = P(X \geqslant 11,9) = \frac{0,01}{2} = 0,005}$$

2. **On introduit la variable aléatoire Z telle que $Z = \dfrac{X - 11}{\sigma}$.**

   2. a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire Z.
   La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

   2. b. Démontrer que $P\left(Z \leqslant -\frac{0,9}{\sigma}\right) = 0,005$.
   On a d'après la question 1.) :

   $$P(X < 10,1) = 0,005 \iff P\left(\frac{X - 11}{\sigma} < \frac{10,1 - 11}{\sigma}\right) = 0,005 \iff P\left(Z < \frac{-0,9}{\sigma}\right) = 0,005$$

   2. c. En déduire la valeur de σ arrondie au centième.
   Puisque la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. On a d'après la calculatrice :

   $$P\left(Z < \frac{-0,9}{\sigma}\right) = 0,005 \iff \frac{-0,9}{\sigma} \approx -2,57583 \iff \boxed{\sigma \approx 0,35}$$