Math93.com

TD n°3 - Terminale S
Les suites au Bac

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Exercice 1. Amérique du Nord 2017

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.
On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
On a en particulier $s_1 = u_0$.

2. a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

2. b. En déduire que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

2. c. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.

3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.

a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.
b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

```
Entrée :      Saisir n
              Saisir u
Traitement :  s prend la valeur u
              Pour i allant de 1 à n :
                  u prend la valeur ...
                  s prend la valeur ...
              Fin Pour
Sortie :      Afficher u
```

4.

4. a. Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

4. b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

Réponses
Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 2. Pondichéry 2017

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
$u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 3. D'après bac 2018 - Antilles

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

   Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4.
   4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.

   4. b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   4. c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.

   5. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

   5. b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.

   5. c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
```

   La notation « ← » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com

Fin du devoir