Math93.com

TD 1 - Terminale Spécialité
Suites et preuves par récurrence

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Première partie
Rappels sur les suites

Exercice 1. Sens de variation

Étudier le sens de variation des suites suivantes définies par leur terme général :

1. $u_n = 10^n$, pour $n \geqslant 0$; **2.** $v_n = 3^n - n$, pour $n \geqslant 0$; **3.** $w_n = \dfrac{3^n}{n}$, pour $n \geqslant 1$.

Exercice 2. Série harmonique et série alternée de Leibniz

1. Étudier le sens de variation des suites suivantes définies par leur terme général :

1. a. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour $n \geqslant 1$;

1. b. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, pour $n \geqslant 1$;

2. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite des deux suites.

3. Écrire sous Python un algorithme qui prend en entrée un entier naturel n et donne en sortie la valeur du terme u_n. Faire de même avec la suite (v_n).

Remarque

La suite (u_n) est la série harmonique, c'est la série des inverses des entiers naturels non nuls. Elle fait partie de la famille plus large des séries de Riemann et on peut montrer qu'elle diverge, elle tend vers $+\infty$.

La suite (v_n) correspond à la formule de Leibniz et c'est un exemple de série alternée. On peut montrer qu'elle tend vers $\dfrac{\pi}{4}$.
Elle a été découverte en Occident au XVIIe mais apparaît déjà chez Madhava, mathématicien indien de la province du Kerala, vers 1400. Il l'utilise pour calculer une approximation de π.

Exercice 3. Suites imbriquées

Soit pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $v_n \geqslant u_n$.

2. Montrer que (u_n) est une suite croissante.

3. Montrer que (v_n) est une suite décroissante.

4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.

Exercice 4. Suite arithmético-géométrique (c)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.

2. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$.
On précisera la valeur de v_0.

2. b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

3. Variations.

3. a. Déterminer les variations de la suite (v_n).

3. b. En déduire celles de la suite (u_n).

Exercice 5. Expression générale d'une suite arithmético-géométrique (facile)

1. Les suites (u_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_1 & = 10 \\ u_{n+1} & = 2 \times u_n - 1 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad (w_n) : \begin{cases} w_1 & \\ w_n & = u_n - 1 \end{cases}$$

1. a. Montrer que la suite (w_n) est géométrique puis que :

$$\forall n \geqslant 1\,;\ u_n = 9 \times (2)^{n-1} + 1$$

1. b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = 4,5 \times 2^n + 1$$

Remarque

Il est souvent demandé d'exprimer le terme général de la suite sous la forme $u_n = a \times q^n + b$.
On utilise pour cela les propriétés de la fonction puissance. Pour n et p entiers (et q non nul) on a

$$q^{n-p} = q^n \times q^{-p} = q^n \times \frac{1}{q^p} = \frac{q^n}{q^p}$$

2. Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = -5 \\ a_{n+1} & = 0.8 \times a_n + 2 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = -a_n + 10 \end{cases}$$

Montrer que la suite (b_n) est géométrique puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ a_n = -15 \times (0{,}8)^n + 10$$

3. Les suites (c_n) et (d_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(c_n) : \begin{cases} c_2 & = 10000 \\ c_{n+1} & = 0.5 \times c_n - 300 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad (d_n) : \begin{cases} d_2 & \\ d_n & = c_n + 600 \end{cases}$$

Montrer que la suite (d_n) est géométrique puis que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$c_n = 42\,400 \times 0,5^n - 600$$

Exercice 6. Variations et algorithmes

1. Déterminer les sens de variation des suites (v_n), (a_n) et (c_n) de l'exercice 5.
Aide : étudier le signe de la différence de deux termes consécutifs $(u_{n+1} - u_n)$, $(a_{n+1} - a_n)$ *et* $(c_{n+1} - c_n)$

2. A l'aide de la calculatrice, résoudre alors dans l'ensemble des entiers naturels les inéquations :

2. a. $(E_1)\ :\ u_n > 1\,000\,;$ | **2. b.** $(E_2)\ :\ a_n > 9,9\,;$ | **2. c.** $(E_3)\ :\ c_n < -599\,.$

3. On cherche maintenant à résoudre les inéquations de la question 3 avec un algorithme. Recopier et compléter cet algorithme pour chacune des questions de la question 3 puis programmer-le afin de retrouver les résultats précédents.

Pseudo Code

```
u ← ···
n ← 0
Tant que ···   Faire
    u ← ···
    n ← ···
Fin Tant que
afficher ···
```

Exercice 7. Transformer une somme (c)

1. On considère pour n entier, montrer que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(2^k + 2k - 5\right) = 2^{n+1} + n^2 - 4n - 6$$

2. Montrer que pour n entier, $n \geqslant 1$ on a :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Exercice 8. Simplifier en cascade pour trouver un terme général

Soit (u_n) la suite définie pour n entier naturel par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes.

2. On va utiliser une astuce pour obtenir le terme général de la suite. On considère les relations suivantes pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + 1 \\ u_2 = u_1 + 2 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ \cdots \\ u_n = u_{n-1} + n \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre ces relations, montrer que : $u_n = 3 + \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et pour $n \geqslant 1$ entier $v_n = v_{n-1} + 4n + 1$.
En utilisant la même astuce, exprimer v_n en fonction de n.

Deuxième partie

Raisonnement par récurrence

On redonne des exercices du chapitre précédent. Vous pouvez les revoir.

Exercice 9. Calculer le terme général d'une suite récurrente : Récurrence ou cascade

Soit (v_n) la suite définie pour n entier naturel par :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 2 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour n entier naturel : $v_n = n(n+1) + 3$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant l'astuce de l'exercice 8.

Exercice 10. Calculer le terme général d'une suite récurrente : Conjecture et récurrence (c)

Soit (u_n) la suite définie pour n entier naturel par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1. Calculer les premiers termes de la suite. Est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Émettre une conjecture sur l'expression u_n en fonction de n.
3. Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 11. Somme de termes d'une suite définie par récurrence

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie pour n entier par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n + n - 2 \end{cases}$$

1. Donner u_1, u_2, u_3 et u_4 sous forme de fraction irréductible. Que remarque-t-on ?
2. Démontrer que pour tout $n \geqslant 4$ on a : $u_n \geqslant 0$.
3. Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$ on a :
$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$
4. En déduire l'expression, en fonction de n, de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Réponses

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{75}{8}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{3(n+1)(n-7)}{4}$$

Exercice 12. D'après Bac : Avec l'aide d'une fonction (c)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Étudier les variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

2. b. Montrer que, pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, on a : $f(x) \leqslant x$.

2. c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

3. Résoudre à la calculatrice l'inéquation : $u_n < 1,415$

Exercice 13. Etude complète d'une suite : Conjecture et récurrence (c)

Soit (u_n) la suite définie pour n entier naturel par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1. Calculer les premiers termes de la suite.

2. Émettre une conjecture sur l'expression u_n en fonction de n.

3. Démontrer cette formule par récurrence.

4. En déduire les variations de la suite (u_n).

5. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 14. Une majoration avec deux méthodes (c)

Soit (u_n) la suite définie pour n entier naturel par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2\,u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1. Calculer les premiers termes de la suite en les exprimant sous forme de fractions irréductibles.

2. Méthode 1

2. a. Montrer que pour $x \neq -1$ on a :

$$\frac{2x}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$$

2. b. Démontrer par récurrence que (u_n) est majorée par 1.

3. Méthode 2

3. a. Émettre une conjecture sur l'expression u_n en fonction de n.

3. b. Démontrer cette conjecture.

3. c. En déduire que (u_n) est majorée par 1 et même bornée.

Corrections

Correction de l'exercice 4

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 65$ *et pour tout entier naturel* n *:* $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$.

1. **Calculer u_1 et u_2.**

n	0	1	2
u_n	65	$u_1 = 0,8 \times 65 + 18 = 70$	$u_2 = 0,8 \times 70 + 18 = 74$

2. **Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.**

2. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$. On précisera la valeur de v_0.
Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 65 \\ u_{n+1} & = 0{,}8 \times u_n + 18 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 90 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 90 \\ v_{n+1} &= (0{,}8\, u_n + 18) - 90 \\ v_{n+1} &= 0{,}8 \times u_n - 72 \\ v_{n+1} &= 0{,}8 \times \left(u_n + \frac{-72}{0{,}8} \right) \\ v_{n+1} &= 0{,}8 \times (u_n - 90) \\ v_{n+1} &= 0{,}8 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $v_0 = -25$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 90 \\ v_0 &= 65 - 90 \\ v_0 &= -25 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -25 \\ v_{n+1} & = 0{,}8 \times v_n \end{cases} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$.
La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $v_0 = -25$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; v_n = -25 \times (0{,}8)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 90$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 90$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = -25 \times (0{,}8)^n + 90}$$

3. <u>Variations</u>.

3. a. Déterminer les variations de la suite (v_n).
La suite (v_n) est géométrique, de premier terme négatif, et de raison $q = 0,8 \in]0\ ;\ 1[$. Elle est donc <u>strictement croissante</u>.

3. b. En déduire celles de la suite (u_n).
Pour tout entier n on a :

$$u_{n+1} - u_n = (v_{n+1} + 90) - (v_n + 9) = \underline{v_{n+1} - v_n > 0}$$

Car on vient de montrer que la suite (v_n) était croissante, donc $v_{n+1} - v_n$ est positif ce qui implique que $u_{n+1} - u_n$ l'est aussi. Donc la suite <u>(u_n) est aussi croissante</u>.

Correction de l'exercice 10

On obtient pour n entier, $u_n = 2^n - 1$.

Correction de l'exercice 12

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$. Étudier les variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

On montre que sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-2}{x^2}\right)$. Puisque le dénominateur x^2 est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$, f' est du signe du numérateur $x^2 - 2$. Or on a facilement :

$$x^2 - 2 = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$$

Et donc sur $\mathbb{R}_+^*$ on a $\left(x + \sqrt{2}\right) > 0$ ce qui nous donne le signe de f'.

$$\left(x - \sqrt{2}\right) \geqslant 0 \iff x \geqslant \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \left(x - \sqrt{2}\right) \leqslant 0 \iff x \leqslant \sqrt{2}$$

De ce fait :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖	$\searrow$	$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$	$\nearrow$	

2.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ la propriété

$$P(n)\ :\ u_n \geqslant \sqrt{2}$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque : $u_1 = \dfrac{9}{4} = 2,25 > \sqrt{2}$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.

Remarque

L'hypothèse de récurrence est :

$$(HR)\ :\ \boxed{u_n \geqslant \sqrt{2}}$$

Et on cherche à montrer que :

$$\boxed{u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}} \text{ à prouver}$$

On applique l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée et donc que $u_n \geqslant \sqrt{2}$. On compose ensuite par la fonction f qui est croissante sur $\left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$

$$u_n \geqslant \sqrt{2} \Longrightarrow f\left(u_n\right) \geqslant f\left(\sqrt{2}\right)$$

or

$$\begin{cases} f\left(u_n\right) = u_{n+1} \\ f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \end{cases} \Longrightarrow u_{n+1} = \sqrt{2}$$

On a alors montré que $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$ et donc que $P(n+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

- **Conclusion**
  On a montré que $P(1)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

$$\boxed{u_n \geqslant \sqrt{2}}$$

2. b. Montrer que, pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, on a : $f(x) \leqslant x$.

Pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, on a :

$$f(x) - x = \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2+2}{x}\right)$$

Le dénominateur est positif et le numérateur est un polynôme du second degré dont les racines sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Il est du signe du coefficient de x^2 soit négatif à l'extérieur des racines.

Donc pour $x \geqslant \sqrt{2}$, on a :

$$f(x) - x \leqslant 0 \iff f(x) \leqslant x$$

2. c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

On a montré lors de la question (2a) que $u_n \geqslant \sqrt{2}$ pour $n > 0$. Par ailleurs lors de la question (2b) on a montré que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, on a : $f(x) \leqslant x$. De ce fait :

$$\begin{cases} n \geqslant 1 \Longrightarrow u_n \geqslant \sqrt{2} \\ x \geqslant \sqrt{2} \Longrightarrow f(x) \leqslant x \end{cases}$$

De ce fait pour n entier supérieur ou égal à 1, on peut remplacer x par u_n dans l'inégalité $f(x) \leqslant x$:

$$\begin{cases} n \geqslant 1 \Longrightarrow u_n \geqslant \sqrt{2} \\ x \geqslant \sqrt{2} \Longrightarrow f(x) \leqslant x \end{cases} \Longrightarrow f\left(u_n\right) = u_{n+1} \leqslant u_n$$

Donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

3. Résoudre à la calculatrice l'inéquation : $u_n < 1,415$

$$\begin{cases} u_3 \approx 1,42189 > 1,415 \\ u_4 \approx 1,414234 < 1,415 \end{cases}$$

Donc la suite (u_n) étant décroissante, tous les termes de rangs supérieurs à 4 seront inférieurs à u_4

$$\cdots < u_6 < u_5 < u_4 < 1,415$$

soit :

$$\boxed{u_n < 1,415 \iff n \geqslant 4}$$

Correction de l'exercice 13

Soit (u_n) la suite définie pour n entier naturel par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1. **Calculer les premiers termes de la suite.**

$$u_1 = \frac{1}{3} \; ; \; u_2 = \frac{1}{4} \; ; \; u_3 = \frac{1}{5} \; ; \; u_4 = \frac{1}{6}$$

2. **Émettre une conjecture sur l'expression u_n en fonction de n.**
Pour n entier, on peut conjecturer que :

$$u_n = \frac{1}{n+2}$$

3. **Démontrer cette formule par récurrence.**
Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 0$ la propriété

$$P(n) \; : \; u_n = \frac{1}{n+2}$$

- **Initialisation**
Pour $n = 0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque : $u_0 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2+0}$
- **Hérédité**
Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

Remarque

L'hypothèse de récurrence est :

$$(HR) \; : \; \boxed{u_n = \frac{1}{n+2}}$$

Et on cherche à montrer que :

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{n+3}} \text{ à prouver}$$

Pour n entier on a d'après la définition de (u_n) :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

On applique l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée et donc que $u_n = \dfrac{1}{n+2}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} \\ &= \frac{\frac{1}{n+2}}{1+\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{n+2} \times \frac{1}{\frac{n+3}{n+2}} \\ &= \frac{1}{n+2} \times \frac{n+2}{n+3} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

On a alors montré que $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+3}$ et donc que $P(n+1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion**
On a montré que $P(0)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n+2}}$$

4. **En déduire les variations de la suite (u_n).**

- Méthode 1 : Avec une fonction
  Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. On a pour n entier $u_n = f(n)$ et donc il suffit d'étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
  On a facilement, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$ ce qui prouve que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. La suite (u_n) est décroissante.
- Méthode 2 : classique
  Pour tout entier n on a :
  $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} = \frac{-1}{(n+3)(n+2)} < 0$$
  Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

5. **Montrer que la suite (u_n) est bornée.**
   La suite (u_n) est décroissante donc majorée par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et positive. Elle est donc bornée, pour n entier :
   $$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$$

Correction de l'exercice 14

On obtient pour n entier, $u_n = \dfrac{2^n}{2^n+1}$. Donc la suite est bornée car pour n entier : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.