Math93.com

TD n°2 - Terminale S
Suites, limites et preuves par récurrence

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Première partie
Notion de limite finie

Exercice 1. Travailler sur la notion de limite (c)

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

1. Calculer de termes de la suite et conjecturer sa limite avec la calculatrice.
2. Soit $\epsilon > 0$ un réel quelconque. Montrer que l'on peut trouver un entier naturel p tel que pour tout $n > p$ on ait :
$$1 - \epsilon < u_n < 1 + \epsilon$$
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers 1.
4. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
5. A l'aide de la question 1, résoudre l'inéquation :
$$|u_n - 1| < 10^{-4}$$
6. Compléter cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier entier solution de l'inéquation de la question précédente : $|u_n - 1| < 10^{-4}$.

Pseudo Code

$U \leftarrow \cdots$
$n \leftarrow \cdots$
Tant que $\cdots\cdots\cdots$ Faire
  $U \leftarrow \cdots$
  $n \leftarrow \cdots$
Fin Tant que
afficher n

Exercice 2. Travailler sur la notion de limite

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

1. Calculer de termes de la suite et conjecturer sa limite avec la calculatrice.
2. A partir de quel entier n, u_n appartient-il à l'intervalle :
   - **2. a.** $I_1 =]-0,01\,; 0,01[$;
   - **2. b.** $I_2 =]-0,001\,; 0,001[$;
   - **2. c.** $I_3 =]-0,0001\,; 0,0001[$;
3. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

4. Compléter cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier entier solution de l'inéquation de la question précédente : $|u_n| < 10^{-10}$.

Pseudo Code

```
n ← 1
Tant que ········· Faire
    n ← n + 1
Fin Tant que
afficher n
```

Deuxième partie
Notion de limite infinie

Exercice 3. Travailler sur la notion de limite

Soit un la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 - \frac{n}{3}$.

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

2. Résoudre l'inéquation $u_n < A$ pour A réel donnée.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4. Travailler sur la notion de limite

Soit un la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^3 - n^2 + 3n + 1$.

1. Calculer des termes avec la calculatrice et conjecturer la limite de la suite (u_n).

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On considère l'algorithme suivant :

Pseudo Code

```
n ← 0
Tant que n^3 − n^2 + 3n + 1 < 1000 Faire
    n ← n + 1
Fin Tant que
afficher n
```

4. a. A l'aide de la calculatrice, déterminer quel nombre p sera affiché en sortie lors de son exécution.

4. b. Justifier que pour tout $n \geq p$ on a $u_n \geq 1000$.

Troisième partie

Opérations sur les limites

Exercice 5. Pas de forme indéterminée

Calculer la limite des suites définie sur $\mathbb{N}$ par :

1. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(3 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$
2. $v_n = \left(\dfrac{1}{n} - 2\right)(3 + \sqrt{n})$
3. $w_n = \dfrac{5 - \sqrt{26}}{2n^2 + 1}$
4. $x_n = \dfrac{n^2 + 1}{2 - \sqrt{2}}$
5. $y_n = \dfrac{n^5 + 1}{\sqrt{2} - 2}$
6. $a_n = \left(3,14 - \dfrac{\pi}{1 - \dfrac{1}{n}}\right)(n+1)$

Réponses

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = -\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$,

Exercice 6. Avec factorisation par le terme dominant

Calculer la limite des suites définie sur $\mathbb{N}$ par :

1. $u_n = n^3 - n^2 + 3n + 1$
2. $v_n = \dfrac{2n^2 + 3n}{n^2 + n + 1}$
3. $w_n = \dfrac{2n^2 + 3n}{n + 1}$
4. $x_n = \dfrac{2n + 3}{n^2 + 1}$
5. $a_n = n - 3n^2$
6. $b_n = n - \sqrt{n}$
7. $c_n = \dfrac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n} + n^2}$, avec $n > 0$

Réponses

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$

Exercice 7. A vous de voir

Calculer la limite des suites définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

1. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
2. $b_n = \dfrac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n} + 1}$
3. $c_n = \dfrac{2\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} + n}$
4. $d_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

Quatrième partie

Théorèmes de comparaison

Exercice 8. Limite infinie par comparaison

Déterminer la limite des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

1. $u_n = n^2 + \cos n$
2. $v_n = \sin n - n$
3. $w_n = \sqrt{n^2 + 1}$
4. $x_n = (-1)^n - \dfrac{n}{\sqrt{n}}$
5. $y_n = n(-1)^n + n^2$

Réponses

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$

Exercice 9. Limite finie par comparaison, théorème des gendarmes

Déterminer la limite des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

1. $a_n = \dfrac{n+\sin n}{n-\sin n}$ | **2.** $b_n = \dfrac{\cos n}{n} - 1$ | **3.** $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$

Réponses

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$,

Exercice 10. Le théorème des gendarmes et la quantité conjuguée

1. Déterminer la limite de la suite $\left(\sqrt{n+1}\right)_{n\geq 0}$.
2. Conjecturer avec la calculatrice la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$
3. Montrer que pour tout entier n on a :
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$
4. Montrer que pour $n \geq 1$ on a :
$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
5. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 11. Le théorème des gendarmes et une somme

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{\cos(1)}{n^2+n+1} + \frac{\cos(2)}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{\cos(n)}{n^2+n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k)}{n^2+n+1}$$

1. Déterminer le nombre de termes de cette somme, le plus grand des termes et le plus petit.
2. En déduire un encadrement de u_n.
3. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 12. Le théorème des gendarmes et une somme

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

1. Déterminer le nombre de termes de cette somme, le plus grand des termes et le plus petit.
2. En déduire un encadrement de u_n (une minoration peut suffire).
3. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Cinquième partie

Limites de suites géométriques

Exercice 13. Limite avec des termes (q^n)

Déterminer la limite des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

1. $a_n = \dfrac{n+(0,9)^n}{n}$
2. $b_n = \dfrac{2^n - 3^n}{3^n - 1}$
3. $c_n = \dfrac{5^n + (-3)^n}{2^n + 3(-1)^n}$

Réponses

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$,

Exercice 14. Suites géométriques et somme 1 (le modèle)

Soit n un entier naturel et S_n la somme des premiers termes d'une suite géométrique que l'on exhibera :

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

1. Montrer que pour tout entier n :
$$S_n = \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$
2. Montrer que la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$ est $\frac{3}{2}$.

   On a donc montré que :
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$
3. On suppose trivial le fait que la suite (S_n) soit croissante. En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n_0 tel que si $n > n_0$ alors $1,49999 < S_n < 1,5$.

Réponses

(3.) : $n_0 = 11$.

Exercice 15. Suites géométriques et somme 2 (sur le même modèle)

En vous inspirant de l'exercice 14 :

1. Montrer que :
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{4}{3}$$
2. Montrer que :
$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{5}{4}$$
3. Montrer que :
$$1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^3} + \frac{1}{11^4} + \cdots = 1,1$$
4. Soit q un réel tel que $0 < q < 1$, montrer que :
$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

   Retrouver alors les résultats précédents.

Exercice 16. Suites géométriques et somme 3 (facultatif)

1. Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geq 0$, par $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$ et (S_n) la suite définie par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Montrer que (u_n) est géométrique puis déterminer la limite de la suite (S_n).

2. Soit (v_n) la suite définie, pour $n \geq 0$, par $v_n = \dfrac{3}{2^n}$ et (S'_n) la suite définie par $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
Déterminer la limite de la suite (S'_n).

Réponses

(1.) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 6$, ***(2.)*** $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = 6$.

Sixième partie

Limites de suites monotones

Exercice 17. Récurrence et convergence monotone

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}\, u_n + 2 \end{cases}$$

Étape 1 : on montre la convergence

1. Démontrer par récurrence que :

   1. a. pour tout n entier, $8 \leq u_n$;

   1. b. pour tout n entier, $u_{n+1} \leq u_n$;

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite finie ℓ.

Étape 2 : avec une suite auxiliaire, on détermine la limite
On a montré que la suite (u_n) est convergente vers ℓ. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \ell$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

2. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

3. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 18. Récurrence et convergence monotone

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est minorée par 2.

2. Montrer que (u_n) est décroissante.

3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

4. On admet que la limite ℓ vérifie l'équation : $\ell = \sqrt{\ell + 2}$. Déterminer la ou les limites possibles.

Exercice 19. Suites imbriquées (déjà vu dans le TD n°1)

Soit pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

1. (TD 1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $v_n \geq u_n$.
2. (TD 1) Montrer que (u_n) est une suite croissante et que (v_n) est une suite décroissante.
3. (TD 1) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.
4. On peut maintenant en déduire que les deux suites sont convergentes.
   Des compléments en exercice du TD 3 en algoritmique.

Remarque historique

En mathématiques, le problème de Bâle (ou problème de Mengoli) est un problème qui consiste à demander la valeur de la somme de la série des inverses de carrés des entiers (non nuls).
Le problème a été résolu par le génial mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui parvient à démontrer que cette somme tend vers $\frac{\pi^2}{6}$. Il en donna la première démonstration rigoureuse en 1741 mais annonce en 1735 la découverte de la somme exacte.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour obtenir 4 décimales exactes, il faut additionner plus de 15 000 termes de la somme. Avec 1000 termes, on n'obtient que 2 décimales et la fraction irréductible comporte déjà plus de 800 chiffres. Cela reste rêveur quand on pense qu'Euler a calculé 20 décimales exactes (mais avec des méthodes d'accélération de convergence).

Septième partie

Exercices de synthèse

Exercice 20. Une suite de « Babylone »

La suite (u_n) est définie pour tout entier n par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{9}{u_n}\right) \end{cases}$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{9}{x}\right)$.
2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 3.
3. Étudier le sens de variation de (u_n).
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. *Proposer un algorithme permettant de calculer le terme de rang n de la suite (voir exercice du TD 3 en algoritmique).*

Remarque historique

En mathématiques, la méthode de Héron ou méthode babylonienne est une méthode efficace d'extraction de racine carrée, c'est-à-dire de résolution de l'équation $x^2 = a$, avec a positif. Elle porte le nom du mathématicien Héron d'Alexandrie (1er siècle), qui l'expose dans le tome I de son ouvrage *Metrica* (Les métriques). On estime que les babyloniens et égyptiens connaissaient déjà cette méthode vers -2000.

Pour déterminer la racine carré d'un nombre positif a, on choisit u_0 assez proche de $\sqrt{a}$ puis on définit la suite

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

Exercice 21. Algorithme et suite auxiliaire

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Pseudo Code

```
u ← 0
Pour k de 0 à n−1   Faire
    | u ← 3u − 2k + 3
Fin Pour
afficher u
```

Quel est l'affichage en sortie pour $n = 3$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$$

1. Soit (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - n + 1$.

1. a. Démontrer que (v_n) est géométrique.
En déduire que, pour tout entier naturel n on a : $u_n = 3^n + n - 1$.

1. b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Soit p un entier naturel non nul.

2. a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq 10^p$?

2. b. On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq 10^p$.
Justifier que $n_0 \leq 3p$.

2. c. Déterminer avec la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

3. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée, renvoie la valeur du plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq 10^p$.

Exercice 22. Suites imbriquées

On considère les suites (x_n) et (y_n) telles que $x_0 = 4$, $y_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n - \dfrac{1}{2}y_n \\ \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{2}{3}y_n \end{cases}$$

On pose $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$

1. Montrer que (r_n) est une suite géométrique.

2. En déduire la limite de la suite (r_n).

3. Justifier que pour tout entier naturel n, on a $x_n \leq r_n$ et $y_n \leq r_n$.

4. En déduire que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leur limite.

Exercice 23. Les Factorielles ... c'est ma passion

On note $n!$ (se lit « factoriel n ») le nombre $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, pour tout entier naturel $n > 0$. Par convention on définit :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \quad , n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Remarque historique

La notation factorielle est introduite par le mathématicien Christian KRAMP (1760-1826) en 1808 dans *Éléments d'arithmétique universelle* (1808).

Partie A : Variations

1. Calculer $1!, 2!, 3!, 4!$ et $5!$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $(n+1)!$ en fonction de $n!$.
3. Déterminer le sens de variation des suites définies par :

3. a. $u_n = n!$;

3. b. $v_n = \dfrac{n!}{2^n}$;

3. c. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$;

Partie B : Convergence 1

1. Montrer par récurrence qu'à partir d'un certain rang on a :

$$2^n \leq (n-1)!$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Partie C : Convergence 2

1. Montrer par récurrence que pour $n > 0$ on a :

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour $n > 0$ par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Montrer que la suite (v_n) est majorée, puis qu'elle est convergente.

Partie D : Convergence 2 bis (une autre méthode)

On considère la suite (v_n) de la partie C.

1. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier n non nul par $w_n = v_n + \dfrac{1}{n!}$

1. a. Démontrer que la suite (w_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

1. b. En déduire que la suite (w_n) est convergente.

2. Démontrer que (v_n) est convergente vers une limite notée ℓ.
Remarque : on admettra que cette limite est le nombre e que nous veroons dans le chapitre sur l'exponentielle.

Aide

Utiliser l'inégalité obtenue lors de la question **1.** de la partie C. Pour $n > 0$ on a : $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Fin du devoir

Corrections

Correction de l'exercice 1

Soit (u_n) *la suite définie par* $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

1. **Calculer de termes de la suite et conjecturer sa limite avec la calculatrice.**

$$u_0 = 2, u_1 = \frac{3}{2}, u_2 = \frac{4}{3}, u_3 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{6}{5}$$

La suite semble tendre vers 1.

2. **Soit $\epsilon > 0$ un réel quelconque. Montrer que l'on peut trouver un entier naturel p tel que pour tout $n > p$ on ait : $1-\epsilon < u_n < 1+\epsilon$.**
On a :

$$1-\epsilon < u_n < 1+\epsilon \iff \begin{cases} u_n < 1+\epsilon \\ \text{et } 1-\epsilon < u_n \end{cases}$$

Or puisque pour n entier $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on a $u_n > 1$. Donc la deuxième inégalité est toujours vérifiée puisque $1-\epsilon < 1$ avec $\epsilon > 0$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} u_n < 1+\epsilon &\iff 1 + \frac{1}{n+1} < 1+\epsilon \\ &\iff \frac{1}{n+1} < \epsilon \end{aligned}$$

On compose par la fonction inverse qui est strictement sécroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} &\iff n+1 > \frac{1}{\epsilon} \\ &\iff \boxed{n > \frac{1}{\epsilon} - 1 = p} \end{aligned}$$

Donc pour tout $n > p = \dfrac{1}{\epsilon} - 1$, on a $1-\epsilon < u_n < 1+\epsilon$.

3. **En déduire que la suite (u_n) converge vers 1.**
Pour tout réel $\epsilon > 0$, si l'on pose $p = \dfrac{1}{\epsilon} - 1$, à partir du rang $p+1$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert : $]1-\epsilon\,; 1+\epsilon[$. Donc tout intervalle ouvert contenant 1, contient tous les termes de la suite à partir du rang $p+1$.

4. **Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.**
Pour tout entier n on a :

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+2} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

5. **A l'aide de la question 1, résoudre l'inéquation : $|u_n - 1| < 10^{-4}$.**
Notons que l'on vient de montrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, pour tout entier

$$n > \frac{1}{\epsilon} - 1 \text{ on a } 1-\epsilon < u_n < 1+\epsilon$$

or

$$1-\epsilon < u_n < 1+\epsilon \iff |u_n - 1| < \epsilon$$

Soit

$$|u_n - 1| < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

Donc en choisissant $\epsilon = 10^{-4}$ on obtient :

$$|u_n - 1| < 10^{-4} \iff n > 10^4 - 1 \iff n \geq 10^4 = 10\,000$$

6. **Compléter cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier entier solution de l'inéquation : $|u_n - 1| < 10^{-4}$.**

Pseudo Code

$U \leftarrow 2$
$n \leftarrow 0$
Tant que $|U-1| \geq 10^{-4}$ Faire
  $U \leftarrow 1 + \dfrac{1}{n+1}$
  $n \leftarrow n+1$
Fin Tant que
afficher n

Fin du devoir