Math93.com

Combinatoire, Dénombrement et Récurrence

Terminale Spécialité Maths

ROC

Les **ROC, (Restitutions Organisées de Connaissances)**, sont les démonstrations du cours à connaître. Elle sont indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale Spécialité Mathématiques entré en vigueur à la rentrée 2020.
Ce chapitre compte **3 ROC** sur les 19 du programme de terminale. (Tous les ROC sur : www.math93.com).

I Le raisonnement par récurrence

I.1 Propriétés héréditaires

Définition 1

Pour n entier, une propriété $P(n)$ est dit héréditaire s'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$$

Remarque : Attention, une propriété peut être héréditaire et toujours fausse.

Exemple

Soit (a_n) et (b_n) définies pour n entier par :

$$a_n = 4^n + 1 \quad \text{et} \quad b_n = 4^n - 1$$

1. Calculer les 4 premiers termes des suites.
2. Montrer que pour n entier :
$$a_{n+1} - a_n = 3 \times 4^n = b_{n+1} - b_n$$
3. On considère les propriétés pour n entier :
$$P(n)\ :\ "a_n \text{ est multiple de } 3" \quad \text{et} \quad Q(n)\ :\ "b_n \text{ est multiple de } 3"$$
Montrer que les deux propriétés sont héréditaires.
4. À l'aide de la calculatrice, conjecturer si les propriétés semblent vraies ou fausses.

I.2 Le raisonnement par récurrence

En mathématiques, le **raisonnement par récurrence** (ou raisonnement par **induction**, ou par **induction complète**) est une forme de raisonnement visant à démontrer une propriété $P(n)$ portant sur tous les entiers naturels $n \geqslant n_0$. Le raisonnement par récurrence consiste à démontrer les points suivants :

1. la propriété est satisfaite par l'entier n_0 ;
2. chaque fois que cette propriété est satisfaite par un certain nombre entier naturel $n \geqslant n_0$, elle est également satisfaite par son successeur, c'est-à-dire par le nombre entier $n + 1$.
3. Une fois cela établi, on en conclut que cette propriété est vraie pour tous les nombres entiers naturels. Cela grâce à la propriété suivante :

Propriété 1 (Principe de récurrence)

Soit $P(n)$ une propriété.

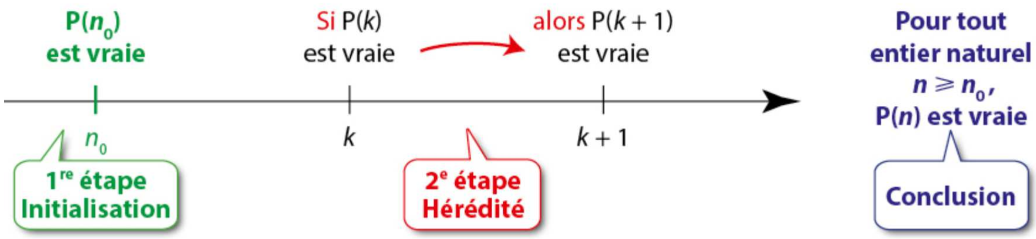
- **Initialisation** : Si on suppose que la propriété est vraie au rang n_0, donc que :

$$P(n_0) \text{ est vraie}$$

- **Hérédité** : Si il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier naturel $n \geqslant n_0$, alors elle est aussi vrai au rang suivant $(n+1)$ donc que :

$$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$$

- **Conclusion** : Alors la propriété est vraie pour tous les entiers $n \geqslant n_0$.



Remarque historique

C'est au mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français Blaise Pascal(1623-1662) dans son *Traité du triangle arithmétique* écrit en 1654 mais publié en 1665, que l'on attribue la première utilisation tout à fait explicite du raisonnement par récurrence.
Certains historiens des sciences voient aussi dans des formes moins abouties ce principe de récurrence dans les travaux du mathématicien indien Bhaskara II (1114-1185), dans la démonstration d'Euclide (v. -300) de l'existence d'une infinité de nombres premiers ou dans des travaux des mathématiciens perses Al-Karaji (953-1029) ou Ibn al-Haytham(953-1039).

I.3 Rédaction type : Un exemple de type Bac

Bac métropole 2019

Soit (a_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$\begin{cases} a_1 = 0,5 \\ a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.

Preuve

Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ la propriété

$$P(n) \; : \; 0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque : $a_1 = 0,5 \in [0\,;\,0,6]$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

  #### Remarque

  On peut utiliser le fait que :

  - Pour n fixé :
    $$(HR) \; : \; \boxed{0 \leqslant a_n \leqslant 0,6}$$
  - Pour tout entier n, on a :
    $$\boxed{a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3}$$

  Et on cherche à montrer que :

  $\boxed{0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0,6}$ à prouver

  On a pour n entier

  $$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée et donc que $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$. En multipliant les membres de l'inégalité par 0,5 puis en ajoutant 0,3 on obtient :

  $$\begin{aligned} 0 \leqslant a_n \leqslant 0,6 &\Longrightarrow 0,5 \times 0 \leqslant 0,5 \times a_n \leqslant 0,5 \times 0,6 \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant 0,5\,a_n \leqslant 0,3 \\ &\Longrightarrow 0,3 \leqslant \underbrace{0,5\,a_n + 0,3}_{a_{n+1}} \leqslant 0,3 + 0,3 \\ &\Longrightarrow 0 < 0,3 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0,6 \end{aligned}$$

  On a alors montré que $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0,6$ et donc que $P(n)$ est vraie.
- **Conclusion**
  On a montré que $P(1)$ est vraie. De plus, si l'on suppose la propriété $P(n)$ vérifiée, alors elle l'est aussi au rang suivant, $P(n+1)$ est vraie. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \;\; 0 \leqslant a_n \leqslant 0,6}$$

I.4 ROC : Inégalité de Bernoulli

Propriété 2

Soit un réel $\alpha > 0$, alors pour tout entier naturel n.

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$$

ROC 1 : Exigible

On va montrer par récurrence que pour tout réel $\alpha > 0$ « $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$ » pour tout entier naturel n.
Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ la propriété

$$P(n) \;:\; (1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$$

- **Initialisation**
  Pour $n=0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque : $(1+\alpha)^0 = 1 \geqslant 1+0\times\alpha = 1$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

  Remarque

On peut utiliser le fait que :	Et on cherche à montrer que :
– Pour n fixé : $(HR) \;:\; \boxed{(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha}$	$\boxed{(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha}$ à prouver

  On a pour n entier

  $$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n \times (1+\alpha)^1$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée
  et donc que $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$, sachant que $\alpha > 0$ et donc $(1+\alpha) > 0$.

  $$\begin{aligned}(1+\alpha)^{n+1} &= (1+\alpha)^n \times (1+\alpha)^1\\ &\geqslant (1+n\alpha)\times(1+\alpha) \quad \text{car} \quad (1+\alpha)>0\\ &\geqslant 1+n\alpha+\alpha+n\alpha^2\\ &\geqslant 1+(n+1)\alpha+n\alpha^2\\ &\geqslant 1+(n+1)\alpha \quad \text{car} \quad n\alpha^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

  On a alors montré que $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha$ et donc que $P(n)$ est vraie.
- **Conclusion**
  On a montré que $P(0)$ est vraie. De plus, si l'on suppose la propriété $P(n)$ vérifiée, alors elle l'est aussi au rang suivant, $P(n+1)$ est vraie. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha}$$

Remarque historique

BERNOULLI Jakob, francisé Jacques (Bâle 1657 - Bâle 1705) démontre en 1689 cette inégalité, que l'on retrouve cependant dès 1670 chez Barrow Isaac (1630 - 1677).

II Principes additif et multiplicatif

Soit n, m et k des entiers naturels.

II.1 Principe additif

Définition 2 (Ensemble fini et cardinal)

Un ensemble A est dit **fini** si il possède un nombre fini n d'éléments (n entier).
On note alors le plus souvent Card (A) « cardinal de A » le nombre d'éléments de l'ensemble A, mais aussi $|A|$ ou $\#A$.

Exemples

1. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels n'est pas fini (mais il est dénombrable). L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est aussi infini (mais il est non dénombrable).
2. Si $A = \{a\ ;\ b\}$, $B = \{b\ ;\ c\ ;\ d\}$ et $C = \{f\}$ alors Card $(A) = 2$, Card $(B) = 3$ et Card $(C) = 1$.
3. Le cardinal de l'ensemble vide $\varnothing$ est 0 soit Card $(\varnothing) = 0$.

Propriété 3 (Principe additif)

Soit A et B deux ensembles finis de cardinaux m et n.

1. Si les ensembles A et B sont disjoints (donc d'intersection l'ensemble vide) on a :

$$\boxed{\text{Card }(A \cup B) = \text{Card }(A) + \text{Card }(B)}$$

2. Si A et B sont quelconques alors :

$$\boxed{\text{Card }(A \cup B) = \text{Card }(A) + \text{Card }(B) - \text{Card }(A \cap B)}$$

Preuve

1. Le premier point est admis. Une démonstration rigoureuse n'est pas si aisée et utilise par exemple une bijection entre A et $\{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ m\}$ et un autre entre B et $\{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ n\}$.
2. L'ensemble $(A \cup B)$ est la réunion disjointe des ensembles finis A et $B \setminus A$ donc :

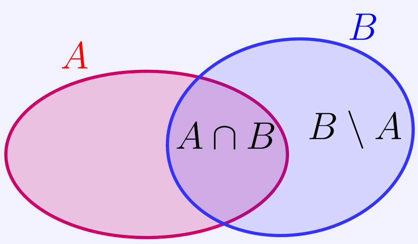
$$\text{Card }(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card }(B \setminus A)$$

De même l'ensemble B est la la réunion disjointe des ensembles finis $B \setminus A$ et $A \cap B$ donc :

$$\text{Card } B = \text{Card }(B \setminus A) + \text{Card }(A \cap A)$$

En soustrayant les deux égalités précédentes on obtient :

$$\text{Card }(A \cup B) = \text{Card }(A) + \text{Card }(B) - \text{Card }(A \cap B)$$



Exemples

1. Si $A = \{a\ ;\ b\}$ et $B = \{b\ ;\ c\ ;\ d\}$ alors :

$$\begin{cases} A \cup B = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\} \\ A \cap B = \{b\} \end{cases} \Longrightarrow \text{Card } (A \cup B) = 2 + 3 - 1 = 4$$

2. Si $B = \{b\ ;\ c\ ;\ d\}$ et $C = \{f\}$ alors :

$$\begin{cases} B \cup C = \{b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ f\} \\ B \cap C = \varnothing \end{cases} \Longrightarrow \text{Card } (B \cup C) = 3 + 1 = 4$$

II.2 Principe multiplicatif

Définition 3 (Couples, triplets)

Soit E un ensemble de cardinal $n \geqslant 3$.

1. **Couples ou 2-uplets**.
Un couple de E est la donnée de deux éléments a et b de E dans un ordre particulier. On le note $(a\ ;\ b)$.
Attention les couples $(a\ ;\ b)$ et $(b\ ;\ a)$ sont différents.
2. **Triplets ou 3-uplets**.
Un triplet de E est la donnée de trois éléments a, b et c de E dans un ordre particulier. On le note $(a\ ;\ b\ ;\ c)$.
Attention les triplets $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et $(a\ ;\ c\ ;\ b)$ sont différents.

Définition 4 (Produit cartésien)

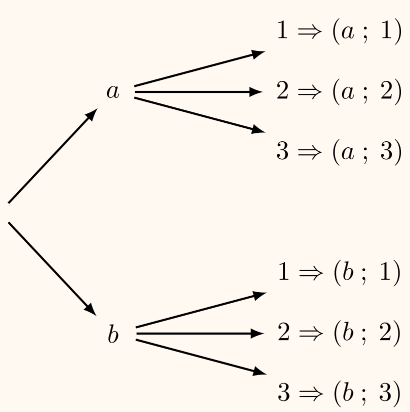
Soit E et F deux ensembles de cardinaux n et m.
Le **produit cartésien** de deux ensembles finis E et F est l'ensemble des **couples** $\boldsymbol{(x\ ;\ y)}$ où x est un élément de E et y un élément de F.

Exemples

Si $E = \{a\ ;\ b\}$ et $F = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ alors le produit cartésien de E et F est :

$$E \times F = \{(a\ ;\ 1)\ ;\ (a\ ;\ 2)\ ;\ (a\ ;\ 3)\ ;\ (b\ ;\ 1)\ ;\ (b\ ;\ 2)\ ;\ (b\ ;\ 3)\}$$

On peut représenter ce produit à l'aide d'un tableau ou d'un arbre.



Propriété 4 (Cardinal du produit cartésien)

Soit E et F deux ensembles de cardinaux n et m, alors le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini dont le nombre d'éléments est $m \times n$.

$$\boxed{\text{Card } (E \times F) = \text{Card } E \times \text{Card } F = m \times n}$$

Preuve (non exigible)

Soit E et F deux ensembles de cardinaux m et n et $(x\ ;\ y)$ un élément de l'ensemble $E \times F$.
On note $\{e_1\ ;\ \cdots\ ;\ e_m\}$ l'ensemble des valeurs prises par x.
L'ensemble de tous les couples $(x\ ;\ y)$ possibles peut s'écrire :

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_m$$

où G_i est est l'ensemble des couples de la forme $(e_i\ ;\ y)$.
Pour tout i, il y a autant d'éléments dans G_i de de y, c'est à dire n.
Donc G est fini, car réunion finie d'ensembles finis, et comme la réunion est disjointe on a :

$$\text{Card } G = \sum_{i=1}^{m} \text{Card } G_i = \sum_{i=1}^{m} n = m \times n$$

III Dénombrement des k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble fini E

Soit n, m et k des entiers naturels.

III.1 k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble fini E

Définition 5 (k-uplets ou k-listes)

Soit E un ensemble de cardinal n et k un entier naturel non nul.
Un ***k*-uplets** (ou ***k*-listes**) est une liste ordonnées $(e_1\ ;\ e_2\ ;\ \cdots\ ;\ e_k)$ de k éléments de E, distincts ou confondus.
L'ensemble de tous les k-uplets de E est l'ensemble :

$$\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k \text{ fois}} = E^k$$

Exemples

1. Un code de carte bancaire est un 4-uplet de $E = \{0\ ;\ 1\ ;\ \cdots\ ;\ 9\}$.
   Soit par exemple : $(0\ ;\ 0\ ;\ 2\ ;\ 5) \in E^4$ ou $(1\ ;\ 7\ ;\ 7\ ;\ 7) \in E^4$.
2. Un « mot » de 5 lettres est un 5-uplet de l'alphabet par exemple $F = \{a\ ;\ b\ ;\ \cdots\ ;\ z\}$.
   Soit : $(m\ ;\ m\ ;\ m\ ;\ a\ ;\ z) \in F^5$ ou $(s\ ;\ a\ ;\ l\ ;\ u\ ;\ t) \in F^5$.
   Attention, un « mot » n'a pas nécessairement de sens.

III.2 Dénombrement des k-uplets (ou k-listes) d'un ensemble fini E

Propriété 5 (Dénombrement des k-uplets)

Soit E un ensemble de cardinal n et k un entier naturel non nul.
Le nombre de k-uplets de E est n^k.

$$\boxed{\text{Card }\left(E^k\right) = (\text{Card } E)^k = n^k}$$

Preuve

Soit E un ensemble de cardinal n et k un entier naturel non nul.
Nous allons démontrer cette propriété par récurrence sur k. Notons pour tout entier naturel $k \geqslant 1$ la propriété

$$P(k)\ :\ \text{Card }\left(E^k\right) = (\text{Card } E)^k = n^k$$

- **Initialisation**
Pour $k = 1$, la propriété $P(k)$ est vraie puisque :

$$\text{Card } E^1 = \text{Card } E = n = n^1$$

- **Hérédité**
Supposons que pour k entier fixé, $P(k)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $k+1$.

Remarque

On peut utiliser le fait que :

- Pour k fixé :

$$\boxed{\text{Card }\left(E^k\right) = (\text{Card } E)^k = n^k}$$

- D'après la propriété 4 page 7

$$\text{Card }(E \times F) = \text{Card } E \times \text{Card } F$$

Et on cherche à montrer que :

$$\boxed{\text{Card }\left(E^{k+1}\right) = (\text{Card } E)^{k+1} = n^{k+1}}$$

On a pour k entier

$$\text{Card }\left(E^{k+1}\right) = \text{Card }\left(E^k \times E\right)$$

On applique alors la la propriété 4 page 7 : Card $(E \times F) = \text{Card } E \times \text{Card } F$

$$\text{Card }\left(E^{k+1}\right) = \text{Card }\left(E^k\right) \times \text{Card } E$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence : Card $\left(E^k\right) = (\text{Card } E)^k = n^k$.

$$\begin{aligned}\text{Card }\left(E^{k+1}\right) &= \text{Card }\left(E^k\right) \times \text{Card } E \\ &= (\text{Card } E)^k \times \text{Card } E \\ &= (\text{Card } E)^{k+1}\end{aligned}$$

On a alors montré que Card $\left(E^{k+1}\right) = (\text{Card } E)^{k+1} = n^{k+1}$ et donc que $P(k)$ est vraie.

- **Conclusion**
  On a montré que $P(1)$ est vraie. De plus, si l'on suppose la propriété $P(k)$ vérifiée, alors elle l'est aussi au rang suivant, $P(k+1)$ est vraie. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $k \geqslant 1$.

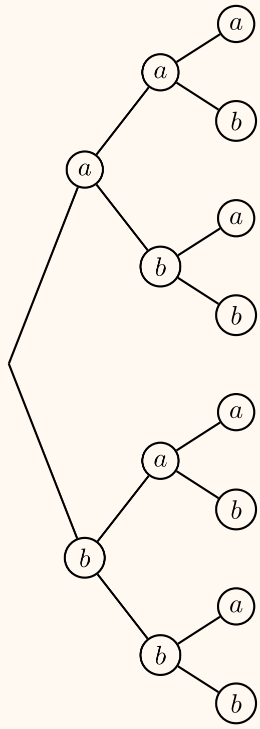
$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \ \text{Card }\left(E^k\right) = (\text{Card } E)^k = n^k}$$

Exemples

Si $E = \{a\ ;\ b\}$ on a $n = \text{Card } E = 2$ et le nombre de 3-uplets de E est :
$n^3 = 2^3 = 8$.

On peut le vérifier à l'aide d'un arbre en écrivant l'ensemble de tous les 3-uplets de E.

$E^3 = \{(a,a,a)\ ;\ (a,a,b)\ ;\ (a,b,a)\ ;\ (a,b,b)\ ;\ (b,a,a)\ ;\ (b,a,b)\ ;\ (b,b,a)\ ;\ (b,b,b)\}$

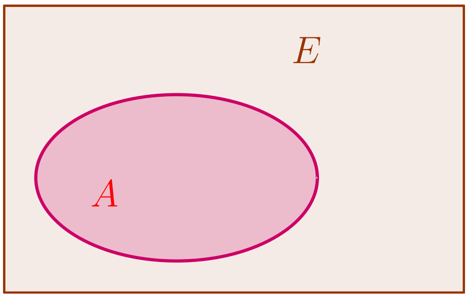


IV Nombre de parties d'un ensemble

Définition 6 (Parties d'un ensemble E)

1. **A inclus dans E : $A \subset E$.**
   La notation $A \subset E$, qui se lit « A inclus dans E » signifie que tout élément de l'ensemble A appartient à l'ensemble E.

   On dit aussi que l'ensemble **A est une partie (ou sous-ensemble) de l'ensemble E.**
2. **$\mathscr{P}(E)$: Ensemble des partie de E.**
   On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E.
3. **L'ensemble vide** $\varnothing$ est une partie de tout ensemble E.



Exemples

1. Si $E = \varnothing$, alors l'ensemble des parties de E est lui-même. Il ne comporte qu'un seul élément :
$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing\}$$
2. Si $E = \{a\}$, alors l'ensemble des parties de E est lui-même et $\varnothing$. Il ne comporte que deux éléments.
$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\varnothing \;;\; \{a\}\Big\}$$
3. Si $E = \{a \;;\; b\}$, alors l'ensemble des parties de E constitué de 4 sous-ensembles, ceux :
   - à 0 élément soit : $\varnothing$;
   - à 1 élément soit : $\{a\}$ et $\{b\}$;
   - à 2 éléments soit : $\{a \;;\; b\} = E$.
$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\varnothing \;;\; \{a\} \;;\; \{b\} \;;\; \{a \;;\; b\}\Big\}$$
4. Si $E = \{a \;;\; b \;;\; c\}$, alors l'ensemble des parties de E constitué de 8 sous-ensembles, ceux :
   - à 0 élément soit : $\varnothing$;
   - à 1 élément soit : $\{a\}$ et $\{b\}$ et $\{c\}$;
   - à 2 éléments soit : $\{a \;;\; b\}$ et $\{a \;;\; c\}$ et $\{b \;;\; c\}$;
   - à 3 éléments soit : $\{a \;;\; b \;;\; c\} = E$.
$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\varnothing \;;\; \{a\} \;;\; \{b\} \;;\; \{c\} \;;\; \{a \;;\; b\} \;;\; \{a \;;\; c\} \;;\; \{b \;;\; c\} \;;\; \{a \;;\; b \;;\; c\}\Big\}$$

On peut légitimement se demander quel est le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de cardinal n, c'est à dire quel est le cardinal de $\mathscr{P}(E)$?

Propriété 6 (Nombre de parties de E)

Soit E un ensemble de cardinal n, avec n entier, $n \geqslant 0$.
Le nombre de partie de E est 2^n soit

$$\boxed{\text{Card } (\mathscr{P}(E)) = 2^n}$$

Preuve

On va ici exposer 3 preuves différentes, une 4e sera proposée en exercice.

1. Preuve n°1.
   Déterminer une partie A de E, c'est déterminer pour chaque élément de E s'il appartient ou non à A.

   Il y a 2 possibilités pour chaque élément de E et en tout, 2^n choix.

   On peut formaliser cela ainsi ...

2. Preuve n°2.
   Soit $E = \{e_1 \ ; \ \cdots \ ; \ e_n\}$ un ensemble de cardinal n.

   On associe à chaque partie A de E un unique n-uplet de l'ensemble $\{0 \ ; \ 1\}$ de la manière suivante :

   - pour tout entier i de 1 à n, on note 1 si e_i est dans A ;
   - et 0 sinon.

   Par exemple on associe à $A = \{e_1 \ ; \ \mathrm{e}_3\}$ le n-uplet $\{1 \ ; \ 0 \ ; \ 1 \ ; \ 0 \ ; \ \cdots \ ; \ 0\}$ soit :

   $$\{e_1 \ ; \ \mathrm{e}_3\} \longmapsto \{1 \ ; \ 0 \ ; \ 1 \ ; \ 0 \ ; \ \cdots \ ; \ 0\}$$

   De ce fait le nombre de parties de E est égale au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0 \ ; \ 1\}$, c'est à dire $(\text{Card } \{0 \ ; \ 1\})^n$ d'après la propriété 5 page 8 :

   $$\text{Card } (\mathscr{P}(E)) = 2^n$$

   ### Remarque

   On dit qu'il y a une **bijection** entre l'ensemble des parties de E et l'ensemble des n-uplets de $\{0 \ ; \ 1\}$. C'est à dire qu'à chaque partie de E, on peut associer 1 et 1 seul n-uplets de $\{0 \ ; \ 1\}$ et réciproquement à chaque n-uplets de $\{0 \ ; \ 1\}$, on peut associer 1 et 1 seule partie de E .

3. Preuve n°3 : par récurrence.
   Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 0$ la propriété

   $$P(n) \ : \ \text{Un ensemble à } n \text{ éléments a } 2^n \text{ parties}$$

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque si $E = \varnothing$, alors l'ensemble des parties de E est lui-même. Il ne comporte qu'un seul élément :

     $$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing\} \Longrightarrow \text{Card } (\mathscr{P}(E)) = 2^0 = 1$$

   - **Hérédité**
     Supposons que pour k entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.

Remarque

On peut utiliser le fait que :

- Pour n fixé :
  « *Un ensemble à n éléments a 2^n parties* »

Et on cherche à montrer que :

« *Un ensemble à $(n+1)$ éléments a 2^{n+1} parties* »

Soit n un entier et E un ensemble à $(n+1)$ éléments.
Alors $E = F \cup \{x\}$ où F est un ensemble ayant n éléments et x un élément qui n'appartient pas à F.
Il y a alors deux familles de parties de E :

- celles qui ne contiennent pas x, c'est à dire les parties de l'ensemble F et il y en a 2^n d'après l'hypothèse de récurrence ;
- celles qui contiennent x. On les obtient en adjoignant x à chacune des 2^n parties de F, il y en a donc aussi 2^n.

Ainsi, le nombre de parties de E est égal à :

$$2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

On a alors montré que Un ensemble à $(n+1)$ éléments a 2^{n+1} parties et donc que $P(k)$ est vraie.

- **Conclusion**
  On a montré qu'un ensemble à $(n+1)$ éléments a 2^{n+1} parties. De plus, si l'on suppose la propriété $P(n)$ vérifiée, alors elle l'est aussi au rang suivant, $P(n+1)$ est vraie. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ \text{Un ensemble à } n \text{ éléments a } 2^n \text{ parties}}$$

Remarque historique

L'ensemble de tous les ensembles
Le paradoxe de Russell, est un paradoxe de la théorie des ensembles qui a ébranlé la communauté scientifique. Il fut découvert par Bertrand Russell vers 1901 et publié en 1903. Pour simplifier en voici l'idée :
Soit E l'ensemble de tous les ensembles. J'en prends ensuite l'ensemble de ses parties, il est plus "gros" et pourtant il est contenu dans E puisque par définition celui ci contient tous les ensembles. On arrive donc a une contradiction.
L'historien des sciences Jean-Paul Delahaye précise dans son article publié dans "Pour la science N°397 - Novembre 2010" :
« *Le choc produit par l'antinomie de Russell fut très grave. Il ébranla par exemple l'allemand Richard Dedekind qui cessa un moment de publier ses travaux sur la théorie des nombres.*
Le philosophe allemand Gottlob Frege prit connaissance de l'antinomie de Russell en mettant la dernière main à son ouvrage sur les fondements de l'arithmétique. Il y ajouta une note exprimant son désarroi : « Un scientifique peut difficilement être confronté à une situation plus désagréable que celle de voir les bases de son travail disparaître au moment précis où il s'achève. J'ai été mis dans cette situation par une lettre de Bertrand Russell alors que le livre était pratiquement sous presse. » »

V p-arrangements de E ou p-uplets d'éléments distincts de E et permutations

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

V.1 p-arrangements de E ou p-ulets d'éléments distincts de E

Définition 7 (k-arrangements de E ou de p-uplets d'éléments distincts)

Soit E un ensemble de cardinal n.
On appelle ***p*-arrangements de E** ou de ***p*-uplets d'éléments distincts de E** un p-uplet de E pour lequel tous les éléments sont différents.

Exemples

1. Soit $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ alors $(a\ ;\ b)$ et $(a\ ;\ c)$ sont des 2-arrangements de E.
2. Soit $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ alors $(a\ ;\ a)$ n'est pas un 2-arrangements de E car les éléments sont identiques.
3. Soit $F = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}$ alors $(a\ ;\ b\ ;\ d)$ et $(a\ ;\ c\ ;\ d)$ sont des 3-arrangements de F. Mais $(a\ ;\ d\ ;\ d)$ n'est pas un 3-arrangements de F car l'élément d est répété.

Propriété 7 (A_n^p : Nombre de p-arrangements de E)

Soit E un ensemble de cardinal n. Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.
Le nombre de p-arrangements de E est égal à :

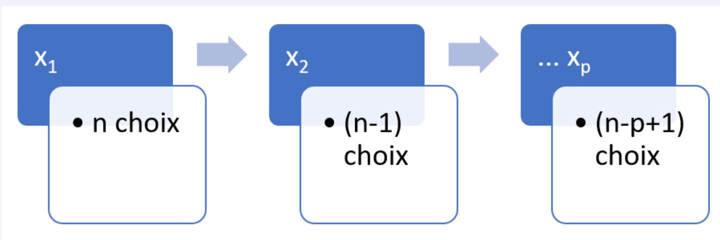
$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$$

Ce nombre est noté A_n^p.

Preuve

Un p-arrangement de E est une p-liste ou un p-uplet $(x_1\ ;\ \cdots\ ;\ x_p)$ d'éléments de E distincts deux à deux.
Se donner un tel arrangement, c'est :

- choisir x_1, et il y a n choix possibles ;
- puis choisir x_2, différents de x_1, et il y a $(n-1)$ choix possibles ;
- puis choisir x_3, différents de x_1 et x_2, et il y a $(n-2)$ choix possibles ... ;
- enfin choisir x_p, différents de $x_1, \cdots, x_{p-1}$, et il y a $\Big(n-(p-1)\Big)$ choix possibles.



Au final, on obtient $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$ arrangements.

Exemples

1. Le nombre de 5-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 8 éléments est 6 720 car :

$$A_8^6 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720$$

2. Lors d'une course du 100 mètres disputées par 9 athlètes, le nombre de podiums possibles correspond au nombre de 3-arrangements d'un ensemble à 9 éléments soit :

$$A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

V.2 Factoriel et A_n^p

Définition 8 (Factoriel)

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle factorielle n, notée $n!$, le produit de tous les entiers compris entre 1 et n.

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

On peut noter ce produit avec le symbole $\prod$.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Par convention : $0! = 1$.

Remarque

Toutes les calculatrices disposent d'une touche factorielle :

- directement sur le clavier via la touche $\boxed{\text{alpha}}$ et la touche $\boxed{\cdot}$ sur la Numworks ;
- ou par l'intermédiaire de menus :
  - $\boxed{8}$ $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F6}}$ $\boxed{\text{F3}}$ $\boxed{\text{F1}}$ sur les CASIO
  - $\boxed{8}$ $\boxed{\text{math}}$ $\boxed{\text{PROB}}$ $\boxed{4 : !}$ sur les Ti.

Exemples

$$0! = 1 \ ; \ 1! = 1 \ ; \ 2! = 2 \ ; \ 3! = 6 \ ; \ 4! = 24 \ ; \ 5! = 120$$

Attention aux factorielles, car le milliard est très vite atteint par exemple :

$$13! \approx 6 \times 10^9 \quad \text{et} \quad 50! \approx 3 \times 10^{64}$$

Propriété 8 (A_n^p : Nombre de p-arrangements de E)

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Preuve

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(n-p)!} &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times (n-p)} \\
&= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (n-p) \times (n-p+1) \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times (n-p)} \\
&= (n-p+1) \times \cdots \times n \\
&= A_n^p
\end{aligned}$$

V.3 Permutations d'un ensemble fini

Définition 9 (Permutations d'un ensemble fini)

Une **permutation** d'un ensemble fini E ayant n éléments est un n-arrangement de E, c'est à dire un n-uplet d'éléments tous distincts deux à deux de E.

Exemples

Soit $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ alors $(a\ ;\ b\ ;\ c)$, $(a\ ;\ c\ ;\ b)$, $(b\ ;\ c\ ;\ a)$, $(c\ ;\ a\ ;\ b)$ sont des permutations de E.

On en déduit en appliquant la propriété 7 page 13 :

Propriété 9 (Nombre de permutations de E)

Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments est : $A_n^n = n!$

Exemple

Le championna de football oppose vingt clubs français en une série de trente-huit rencontres jouées durant la saison.
Le classement des 20 équipes à l'issue de la saison est donc une permutation de l'ensemble des 20 équipes. Il y a donc dans l'absolu 20 ! classements possibles, soit plus de 2 milliards de milliards (ou trillions)...

$$20! \approx 2,43 \times 10^{18}$$

Pourtant, c'est étrange, le PSG est toujours premier ces dernières années ... étranges mathématiques !

Remarque historique

Le système français utilise par décret un système dit *d'échelle longue* proposé par le mathématicien français Nicolas Chuquet au 15e siècle. Le système de Nicolas Chuquet consiste à faire suivre les préfixes bi-, tri-, ... du suffixe -llion, pour former les noms d'unité successifs. Chaque unité vaut 10^6 fois l'unité précédente.
Ainsi 10^6 se lit million, 10^{12} se lit billion, 10^{18} se lit trillion ...
Attention, les anglo-saxons utilisent eux l'échelle courte qui consiste à faire suivre les préfixes bi-, tri-, ... du suffixe -llion, pour former les noms d'unité successifs mais chaque unité vaut 10^3 fois l'unité précédente.
Ainsi en anglais, si *a million* correspond aussi à 10^6, par contre *a billion* correspond à 10^9, *a trillion* à 10^{12} ...

Des compléments sur math93.com

VI Combinaisons

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. L'ensemble E possède n éléments.

VI.1 Nombre de combinaisons

Définition 10 (Combinaisons)

Une **combinaison** de p éléments d'un ensemble fini E ayant n éléments est une partie de E ayant p éléments.

On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments de E mais aussi C_n^p. On peut le lire p parmi n.

Remarque : $\binom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir p éléments parmi n.

Remarque

Pour une combinaison de p éléments, on ne tient pas compte de l'ordre des éléments, c'est ce qui la distingue des p-uplets ou p-listes.

Aide - Combinaison : tirage du loto (pas d'ordre) et p-uplets ou p-listes : podium olympique ou tiercé (ordre).

Exemple

Soit $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}$ un ensemble ayant $n = 4$ éléments.
On a alors :

- 1 combinaison à 0 élément de E : $\varnothing$ donc $\binom{4}{0} = 1$;
- 4 combinaison à 1 élément de E : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ donc $\binom{4}{1} = 4$;
- 6 combinaison à 2 éléments de E : $\{a\ ;\ b\}$, $\{a\ ;\ c\}$, $\{a\ ;\ d\}$, $\{b\ ;\ c\}$, $\{b\ ;\ d\}$, $\{c\ ;\ d\}$ donc $\binom{4}{2} = 6$;
- 4 combinaison à 3 éléments de E : $\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$, $\{a\ ;\ b\ ;\ d\}$, $\{a\ ;\ c\ ;\ d\}$, $\{b\ ;\ c\ ;\ d\}$, donc $\binom{4}{3} = 4$;
- 1 combinaison à 4 éléments de E : $\{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}$ donc $\binom{4}{4} = 1$;

Propriété 10

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. L'ensemble E possède n éléments.

1. $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$

2. $\binom{n}{p} = \dfrac{A_p^n}{p!}$

3. $\binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1$

Preuve (Non exigible)

1. Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ et E qui possède n éléments. Considérons l'application f qui, au p-arrangement $\left(a_1 \,;\, a_2 \,;\, \cdots \,;\, a_p\right)$ associe la partie $F = \{a_1 \,;\, a_2 \,;\, \cdots \,;\, a_p\}$ de cardinal p de E.

$$\left(a_1 \,;\, a_2 \,;\, \cdots \,;\, a_p\right) \underset{f}{\longmapsto} F = \{a_1 \,;\, a_2 \,;\, \cdots \,;\, a_p\}$$

Tout sous-ensemble $F = \{a_1 \,;\, a_2 \,;\, \cdots \,;\, a_p\}$ de E de cardinal p a autant d'antécédents par f qu'il y a de façons d'ordonner ses éléments pour construire un arrangement. C'est le nombre de permutations de $F = \{a_1 \,;\, a_2 \,;\, \cdots \,;\, a_p\}$, c'est à dire $p!$.

Ainsi pour toute partie F de E de cardinal p, il y a exactement $p!$ arrangements dont l'image par f est F.

Le nombre d'images, c'est à dire de partie de E de cardinal p, soit $\binom{n}{p}$, s'obtient donc en divisant le nombre d'arrangements A_p^n par $p!$.

De ce fait :

$$\frac{A_p^n}{p!} = \binom{n}{p}$$

Remarque : L'application f est dite *surjective*.
Une application surjective est une application pour laquelle tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent.

VI.2 Calculatrices

Pour calculer $\binom{10}{5} = 252$

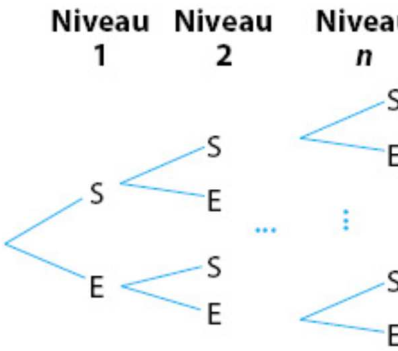
TI : 10 math ▶▶▶ (PROB) 3 (Combinaison) 5 entrer

Casio : 10 OPTN F6 (▷) F3 (PROB) F3 (nCr) 5 EXE

NumWorks : Dénombrement ▷ binomial(n,k) k parmi n EXE 10▼5 EXE.

VI.3 Représentation en terme de chemins dans un arbre

Soit une répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli (Succès/Echec) que l'on représente par un arbre.



Un chemin peut être représenté par une succession de n cases où l'on écrit S pour succès et E pour échec.

$$\boxed{S}\,\boxed{E}\,\boxed{E}\cdots\boxed{S}\,\boxed{E}$$

Le nombre de chemins avec k succès ($0 \leqslant k \leqslant n$) est le nombre de choix de k cases parmi n où l'on écrit la lettre S.

Dans un arbre « succès-échec » à n niveaux, le nombre de chemins avec k succès est $\binom{n}{k}$.

VII Propriétés des nombres de combinaisons

VII.1 Symétrie des nombres de combinaisons

Propriété 11 (Symétrie)

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$$

Preuve

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. D'une part :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-p} &= \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!p!} \\ &= \binom{n}{p}\end{aligned}$$

<u>Remarque</u> : Dans un arbre « succès-échec » à n niveaux, le nombre de chemins avec k succès $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de chemins qui réalisent k échecs.

VII.2 Développement de $(a+b)^n$

La proposition suivante est proposée en exercice dans le TD associé.

Propriété 12 (Développement $(a+b)^n$)

Soit a et b deux nombres réels et n un entier.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}}$$

Exercice 1

Soit a et b deux nombres réels et n un entier.

1. On développe $(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)$. Quelle est la forme des termes obtenus ?
2. Pour k fixé, combien y-a-t-il de termes égaux à $a^k\, b^{n-k}$?
3. Conclure :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

VII.3 ROC : somme des coefficients binomiaux

Propriété 13 (Somme des coefficients binomiaux)

Soit n un entier naturel, alors on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n}$$

ROC 2 : Exigible

Si Card $E=n$, alors on sait d'après la propriété 6 page 11 que Card $(\mathscr{P}(E))=2^n$.
Par ailleurs pour $0\leqslant k\leqslant n$, notons $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal k, alors $\mathscr{P}(E)$ est la réunion disjointe de $\mathscr{P}_0(E)$, $\mathscr{P}_1(E), \cdots \mathscr{P}_n(E)$.
En d'autres termes, l'ensemble des parties de E est la réunion (disjointe) des parties de E ayant 0 élément, 1 élément, 2 éléments, ..., n éléments.
De ce fait :

$$\text{Card } \mathscr{P}(E)=\sum_{k=0}^{n}\text{Card } \mathscr{P}_k(E)$$

Et puisque par définition : Card $\mathscr{P}_k(E)=\binom{n}{k}$ on obtient :

$$\text{Card } \mathscr{P}(E)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \iff \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

Remarque

La propriété 12 page 18 n'est pas explicitement au programme. :

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^k\,b^{n-k}$$

Mais si on l'admet, on peut facilement redémontrer la propriété 13.
En effet, en prenant $a=b=1$ dans l'expression on obtient immédiatement :

$$(2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,1^k\,1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

VII.4 ROC : Relation de Pascal

Propriété 14 (Relation de Pascal)

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}}$$

Remarque : attention à la condition initiale, il faut que $p \leqslant n-1$.

ROC 3 : Exigible

1. Première preuve.
   On fixe un élément a de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ n\}$. parmi les parties de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ n\}$ de cardinal p, on distingue :

   - celles qui contiennent a : il y en a $\binom{n-1}{p-1}$ puisque cela revient (en plus de a) à choisir $(p-1)$ éléments de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ n\} \setminus \{a\}$

   $$\boxed{a}\ \underbrace{\boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \cdots\ \boxed{?}\ \boxed{?}}_{\text{choisir } (p-1) \text{ cases parmi } (n-1)}$$

   - celles qui ne contiennent pas a : il y en a $\binom{n-1}{p}$ puisque cela revient (en plus de a) à choisir p éléments de $\{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ n\} \setminus \{a\}$

   $$\underbrace{\boxed{?}\ \boxed{?}\ \boxed{?}\ \cdots\ \boxed{?}\ \boxed{?}}_{\text{choisir } (p) \text{ cases parmi } (n-1)}$$

   Comme ces ensembles de parties sont disjointes et que le nombre total de parties de E de cardinal p est $\binom{n}{p}$:

   $$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

2. Deuxième preuve.
   On peut juste démontrer cette égalité par le calcul. Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times p}{(p-1)!\,(n-p)! \times p} + \frac{(n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p-1)! \times (n-p)} \\
&= \frac{(n-1)! \times p + (n-1)! \times (n-p)}{p!\,(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times (p + (n-p))}{p!\,(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times n}{p!\,(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

VII.5 Le triangle de Pascal

Remarque historique

La plus ancienne illustration existante du « triangle de Pascal » est due mathématicien chinois YANG Hui (1238 - 1298) qui précise cependant s'inspirer des travaux (perdus) du mathématicien JIA Xian (1010 - 1070).
Son nom reste pourtant lié au célèbre mathématicien français Blaise PASCAL (1623 - 1662), car il en propose une étude détaillée en 1653.

De nombreux compléments historiques sur www.math93.com

On cherche à déterminer les $\binom{n}{p}$ pour n et p entiers avec $0 \leqslant p \leqslant n$.

On peut déjà compléter une partie du tableau des $\binom{n}{p}$;

1. les deux premières lignes car : $\binom{0}{0} = 1$ et $\binom{1}{0} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$;
2. la première colonne puisque $\binom{n}{0} = 1$;
3. la diagonale puisque $\binom{n}{n} = 1$;

n/p	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1		1					
$n=3$	1			1				
$n=4$	1				1			
$n=5$	1					1		
$n=6$	1						1	
$n=7$	1							1

La relation de Pascal (propriété 14 page 20) va nous permettre de calculer de façon algorithmique les coefficients $\binom{n}{p}$ car pour n et p des entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

	$p-1$	p
$n-1$	$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$
n		$\binom{n}{p}$

De ce fait on a facilement :

- Pour $n = 2$. On a : $\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$

n/p	$p=0$	$p=1$	$p=2$
$n=0$	1		
$n=1$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	
$n=2$	1	$\boxed{2}$	1

- Pour $n = 3$. On a :

$$\binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3$$

n/p	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$
$n=0$	1			
$n=1$	1	1		
$n=2$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	1	
$n=3$	1	$\boxed{3}$	?	1

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 2 + 1 = 3$$

n/p	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$
$n=0$	1			
$n=1$	1	1		
$n=2$	1	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	
$n=3$	1	3	$\boxed{3}$	1

Exercice 2

Compléter alors le tableau suivant :

n/p	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1		1					
$n=3$	1			1				
$n=4$	1				1			
$n=5$	1					1		
$n=6$	1						1	
$n=7$	1							1

Fin du cours