



**ROC**  
Les **ROC**, (**R**estitution **O**rganisée de **C**onnaissances), sont les démonstrations du cours à connaître. Ce chapitre ne compte pas vraiment de ROC mais les algorithmes de dichotomie et de balayage sont explicitement à connaître.

## I Continuité

### I.1 Notion de continuité

#### I.1.1 Une première définition

##### Définition 1

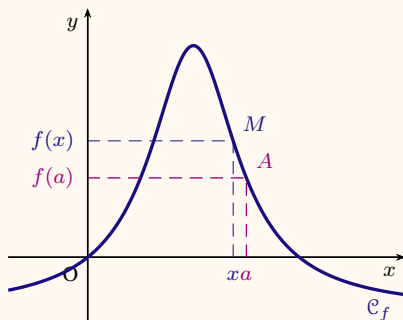
Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Dire que  $f$  est **continu sur  $I$**  signifie que sa courbe représentative peut être tracée en **un seul morceau** (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).



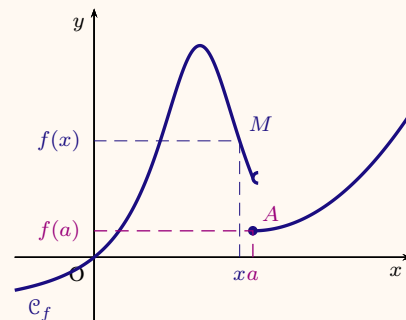
##### Exemple

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  un réel de  $I$ . On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative et  $A$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $a$ . Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $I$ , on considère le point  $M$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $x$ .



La fonction  $f$  est continue.

Pour tout réel  $a$  de  $I$ , on peut rendre  $f(x)$  aussi proche que l'on veut de  $f(a)$  pourvu que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$ .



La fonction  $f$  n'est pas continue en  $a$ .

La courbe  $\mathcal{C}_f$  présente un saut au point d'abscisse  $a$ .  
Le point  $M$  n'est pas proche du point  $A$  quand  $x$  est proche de  $a$ .

#### I.1.2 Définition : avec la notion de limite de fonction

##### Définition 2 ( $f$ continue en $a$ )

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

- La fonction  $f$  est continue en  $a$  si la limite de  $f$  en  $a$  existe et donc :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- La fonction  $f$  est continue sur  $I$  lorsque pour tout réel  $a$  de  $I$ , elle est continue en  $a$ .



##### Remarque

En post bac, on écrira : Une fonction  $f$  définie sur  $I$  est continue en  $a \in I$  si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon)$$

Avec  $\epsilon$  qui se lit "epsilon" et  $\eta$  qui se lit "êta".

## I.2 Propriétés

### I.2.1 Dérivable implique continue (admis)

#### Propriété 1

Toute fonction **dérivable** sur un intervalle  $I$  est **continue** sur cet intervalle.

### I.2.2 Réciproque fausse : un contre exemple

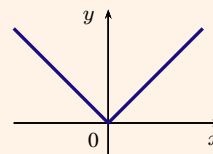


#### Remarque

**La réciproque du théorème est fausse :**

Une fonction peut être continue en un réel  $a$  sans être dérivable en ce réel.

Par exemple la fonction valeur absolue  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x|$  est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



### I.2.3 Conséquences

#### Propriété 2 (Admise)

Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée), la fonction valeur absolue sont continues sur tout intervalle où elles sont définies. De ce fait :

- Les fonctions affines, la fonctions carré, la fonction cube et la fonction valeur absolue sont continues sur  $\mathbb{R}$  ;
- les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$  ; la fonction inverse est continue sur  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ; la fonction racine carrée est continue sur  $[0 ; +\infty[$ .

## I.3 Tableau de variations



#### Convention

Une flèche dans un tableau de variation traduit la stricte monotonie et la continuité (c'est une consigne spécifique du programme) d'une fonction sur un intervalle considéré.



#### Exemple

$x$	-3	-1	0	1
Variations de $g$	-6	-1	-2	4

Diagram showing arrows indicating the function's behavior: an arrow points from -6 to -1, another from -1 to -2, and a third from -2 to 4.

D'après le tableau de variations ci-dessus, la fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[-3 ; -1]$ .

## II Image d'une suite par une fonction continue

### II.1 Propriété très utile (admis)

**Propriété 3 (Admise)**

- Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que pour tout entier  $n$  le terme  $u_n \in I$ .  
Si la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $L$  appartenant à  $I$ , et si  $f$  est continue en  $L$ , alors la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $f(L)$ . C'est que l'on peut résumer par :

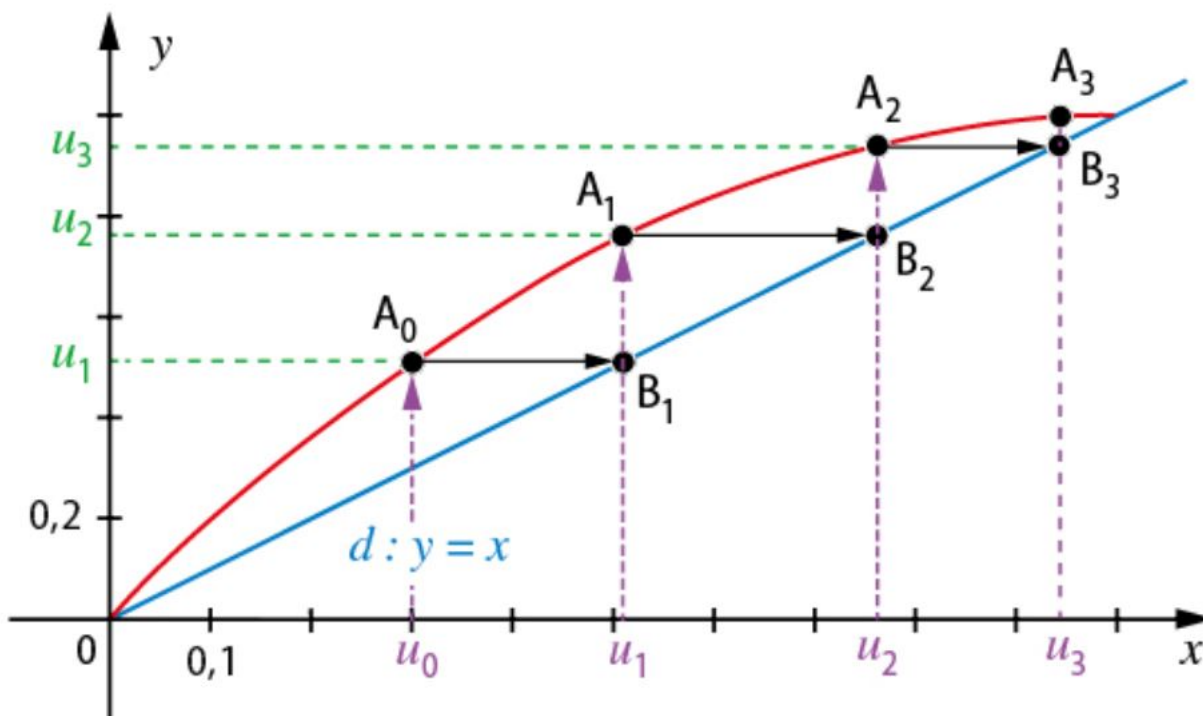
$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ définie sur } I \\ f \text{ continue en } L \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \in I \end{array} \right. \implies \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(L)}$$

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $(u_n)$  une suite telle que pour tout entier  $n$  on a :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
Si la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $L$ , alors  $L$  vérifie l'égalité :  $f(L) = L$ . C'est que l'on peut résumer par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ définie et continue sur } I \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right. \implies \boxed{f(L) = L}$$

### II.2 Construction des premiers termes d'une suite $(u_n)$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

On peut revoir comment construire les premiers termes d'une suite  $(u_n)$  telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Ici on a  $u_0 = 0,3$  et  $\mathcal{C}_f$  est tracée en rouge.



Consultez les animations vidéos présentes sur la page : <https://www.math93.com>

### III La fonction partie entière, une fonction discontinue

**Définition 3** (Partie entière (par défaut))

La **partie entière** (par défaut) d'un nombre réel  $x$  est l'unique entier relatif  $n$  (positif, négatif ou nul) tel que

$$n \leq x < n + 1$$

C'est donc l'entier qui précède  $x$  ou le plus grand entier, inférieur ou égal à  $x$ .

Remarque

La différence entre un nombre  $x$  et sa partie entière (par défaut) est appelée **partie fractionnaire**.



**Notations :  $E(x)$  ou  $\lfloor x \rfloor$**

La partie entière du réel  $x$  se note usuellement  $E(x)$ , où la lettre E désigne la fonction partie entière (par défaut).

La notation  $\lfloor x \rfloor$  est aussi utilisée mais a tendance à être remplacée par la notation anglo-saxonne qui utilise des symboles similaires :

- $\lfloor x \rfloor$  : pour la partie entière (par défaut) (**floor**, « plancher ») définie par :

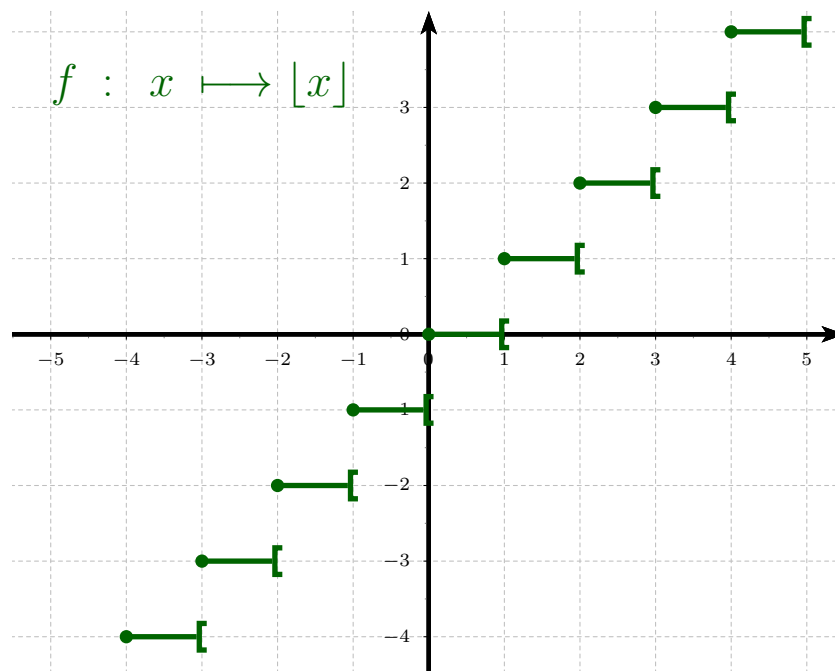
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$



**Exemples**

- $E(2,5) = \lfloor 2,5 \rfloor = 2.$
- $E(-2,5) = \lfloor -2,5 \rfloor = -3.$
- $E(0,5) = \lfloor 0,5 \rfloor = 0.$
- $E(-0,5) = \lfloor -0,5 \rfloor = -1.$

#### III.1 Représentation graphique de la fonction partie entière



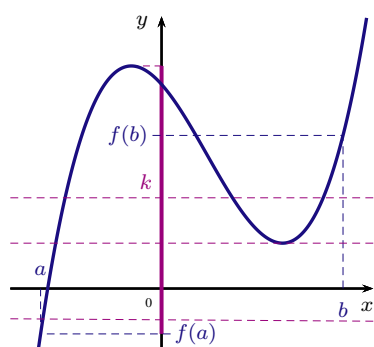
## IV Continuité et propriété des valeurs intermédiaires

### IV.1 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 1** (Théorème des valeurs intermédiaires (Admis))

Si  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $[a ; b]$  et continue sur  $[a ; b]$  alors pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution  $c$  appartenant à  $[a ; b]$ .

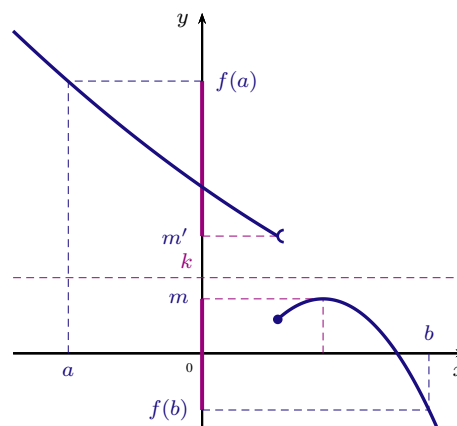
$f$  est continue sur  $I$



L'image de l'intervalle  $[a ; b]$  est un intervalle.

Tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  est l'image d'au moins un élément de  $[a ; b]$ .

$f$  n'est pas continue sur  $I$



L'image de l'intervalle  $[a ; b]$  n'est pas un intervalle.

Il existe des réels  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  pour lesquels l'équation  $f(x) = k$  n'a pas de solution.

#### IV.1.1 Remarque historique

La première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche).

Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano est le fils d'une germanophone et d'un émigré italien en Bohême, alors dans l'Empire d'Autriche. Dans son premier ouvrage *Rein analytischer Beweis...* (1817) il démontre le théorème des valeurs intermédiaires sans utiliser l'évidence géométrique comme on le faisait alors.



Bernard Bolzano (1781-1848)



#### Exemple

$x$	-3	$\alpha$	-1	$\beta$	0	$\gamma$	1
Variations de $g$	-6	-1.5	-1	-1.5	-2	-1.5	4

- D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction  $g$  est continue sur  $[-3 ; 1]$ .
- Le réel  $k = -1,5$  est compris entre  $\begin{cases} g(-3) = -6 \\ g(1) = 4 \end{cases}$
- Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = -1,5$  admet au moins une solution appartenant à  $[-3 ; 1]$ .

On va affiner la recherche de solutions afin de les dénombrer, ici il semble qu'il y ait 3 solutions,  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .

### IV.2 Les corollaires du TVI

#### Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

- Si  $f$  est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle  $[a ; b]$ , alors, pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution dans  $[a ; b]$ .
- **Remarque** : On peut également appliquer le corollaire dans le cas d'un intervalle de type  $[a ; +\infty[$ ,  $[a ; b[$ ,  $]a ; +\infty[$  ou  $] - \infty ; b[ \dots$   
On remplace alors le calcul de  $f(a)$  ou  $f(b)$  par un calcul de limite.



Bernard Bolzano (1781-1848)

#### Théorème 3 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a; b]$  et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signe contraires, alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $[a; b]$ .



Bernard Bolzano (1781-1848)

### IV.3 Exemple type de rédaction



#### Point Bac : Rédaction type

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[-3 ; 1]$  et dont le tableau de variation est donnée ci-dessous. On cherche le nombre de solutions sur l'intervalle  $[-3 ; 1]$  de l'équation  $g(x) = -1,5$ .

$x$	-3	-1	$\alpha$	0	$\beta$	$+\infty$
Variations de $g$	-1.2	-1	-1.5	-2	-1.5	4

- Sur  $[-3 ; 1]$ . D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction  $g$  admet un minimum égal à  $-1,2 > -1,5$  sur  $[-3 ; -1]$ . Donc l'équation  $g(x) = -1,5$  n'admet pas de solution sur cet intervalle.
- Sur  $[-1 ; 0]$ .
  - D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $[-1 ; 0]$ .
  - Le réel  $k = -1,5$  est compris entre :  $\begin{cases} g(-1) = -1 > -1,5 \\ g(0) = -2 < -1,5 \end{cases}$  et
  - Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = -1,5$  admet exactement une solution  $\alpha$  appartenant à  $[-1 ; 0]$ .
- Sur  $[0 ; +\infty[$ .
  - D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .
  - Le réel  $k = -1,5$  est compris entre :  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4 > -1,5 \\ g(0) = -2 < -1,5 \end{cases}$  et
  - Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = -1,5$  admet exactement une solution  $\beta$  appartenant à  $[0 ; +\infty[$ .
- Conclusion : l'équation  $g(x) = -1,5$  admet exactement 2 solutions sur l'intervalle  $[-3 ; +\infty[$ .

## V Algorithmes


Pour plus de précisions, consultez la page sur les algorithmes sous Python de [www.math93.com](http://www.math93.com).

### V.1 Un Algorithme de balayage

Cet algorithme correspond au fonctionnement de la calculatrice.

On calcule  $f(1) < 0$  puis on calcule les valeurs suivantes incrémentées d'un pas  $p$  fixé jusqu'à obtenir une valeur positive.

On propose ici une fonction de paramètre  $p$  avec  **$f$  croissante sur l'intervalle considéré** mais on peut imaginer un algorithme plus général, et plus rapide comme dans le TD 1 d'algorithmique disponible sur [www.math93.com](http://www.math93.com).

 **Pseudo Code**


```

Fonction balayage(p)
  ''In : p le pas et on suppose f croissante
  Out : Les bornes de l'intervalle contenant la solution de f(x) = 0''

  pas = p
  x = 1
  y = f(1)
  Tant que y < 0 Faire
    | x ← x + pas
    | y ← f(x)
  Fin Tant que
  Envoyer (x - pas, x)
  
```

### V.2 Algorithme de dichotomie

On suppose ici que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  sur  $[a ; b]$  et que la fonction  **$f$  est monotone sur  $[a ; b]$** .

 **Pseudo Code**

```

Fonction dichotomie(e,a,b)
  ''In : e la longueur de l'intervalle cherché, [a ; b] l'intervalle de départ qui contient la solution α
  Out : Les bornes de l'intervalle contenant la solution α de f(x) = 0''
  # On a donc a < b et on suppose que la fonction f a été définie et est monotone sur [a ; b]
  Tant que (b - a > e) Faire
    | m ← (a + b) / 2
    | Si f(a) × f(m) < 0 Alors # dans ce cas α est dans [a ; m]
    |   | b ← m
    | Sinon # sinon α est dans [m ; b]
    |   | a ← m
  Fin Tant que
  Envoyer (a, b)
  
```