

**ROC**

Les **ROC**, (**R**estitution **O**rganisée de **C**onnaissances), sont les démonstrations du cours à connaître indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale S entré en vigueur à la rentrée 2012. Ce chapitre compte 1 ROC.

## I Nombre dérivé d'une fonction en un point (rappels)

Dans toute cette partie,  $f$  désigne une fonction définie sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $a + h$  deux réels de  $I$  avec  $h \neq 0$ .

### I.1 Taux d'accroissement

#### Définition 1 (Taux d'accroissement)

Le **taux d'accroissement** de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $a + h$  est le rapport défini par :

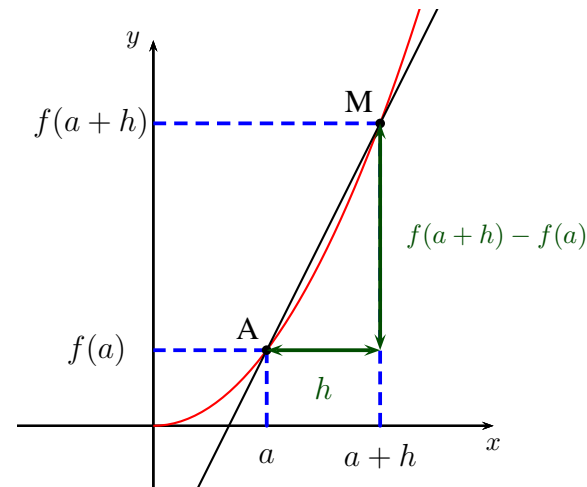
$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



#### Interprétation graphique :

En notant  $\mathcal{C}_f$  la représentation graphique de la fonction  $f$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ;  $A$  le point de coordonnées  $(a; f(a))$  et  $M$  le point de coordonnées  $(a+h; f(a+h))$  :

$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$$



#### Théorème 1

Le taux d'accroissement de  $f$  est donc le coefficient directeur de la droite  $(AM)$  sécante à  $\mathcal{C}_f$ .

### I.2 Nombre dérivé d'une fonction en un point – Tangente à la courbe d'une fonction en un point

#### Définition 2 (Nombre dérivé $f'(a)$ )

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On dit que  $f$  est **dérivable** en  $a$ , si et seulement si, le rapport  $t(h)$  tend vers un réel  $L$  lorsque  $h$  tend vers 0.

Le réel  $L$  est appelé **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , on le note  $f'(a)$ .

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque : Lorsque  $h$  tend vers 0,  $M$  se rapproche de  $A$ .

La droite  $(AM)$  se rapproche de sa « position limite » : la droite qui passe par  $A$  et qui a pour coefficient directeur  $f'(a)$ .

**Propriété 1** (Tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $A$ )

Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors, la **tangente** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$  est la droite qui passe par  $A$  et qui a pour coefficient directeur  $f'(a)$ . Son équation est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**I.3 Bilan****Propriété 2** (Nombre dérivé)

Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors :

1. Le réel  $f'(a)$  est le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  ;
2. Le réel  $f'(a)$  est la limite quand  $h$  tend vers 0 du taux  $t(h)$  ;

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

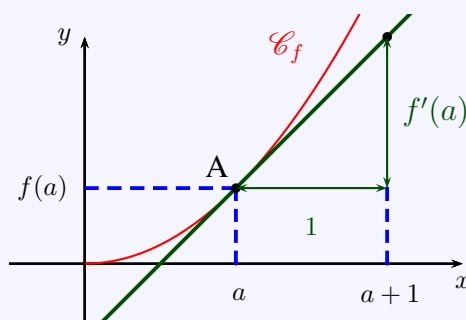
3. Le réel  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la **tangente à la courbe**  $\mathcal{C}_f$  au point  $A(a; f(a))$  et l'équation de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Propriété 3** (Tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $A$ )

Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors, la **tangente** à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$  est la droite qui passe par  $A$  et qui a pour coefficient directeur  $f'(a)$ .  
Son équation est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**II Fonction dérivée (rappels)****II.1 Définition****Définition 3**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On dit que  $f$  est **dérivable sur**  $I$  si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ .

Alors, la fonction qui à tout  $x$  de  $I$  associe le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  est appelée **fonction dérivée** de  $f$  et se note  $f'$ .

$$f' : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f'(x) = f'(x) \end{cases}$$

## II.2 Dérivées de quelques fonctions usuelles

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $I$ ,  $k$  et  $m$  des réels (des constantes). On démontre que les dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur  $I$ , sont :

$I$	$f$ définie par $f(x) =$	Dérivée de $f$	Notation « abusive »
$\mathbb{R}$	Constante = $k$	0	$(Cte)' = 0$
$\mathbb{R}$	$mx + k$	$m$	$(mx + k)' = m$
$\mathbb{R}$	$x$	1	$(x)' = 1$
$\mathbb{R}$	$x^2$	$2x$	$(x^2)' = 2x$
$\mathbb{R}$	$x^3$	$3x^2$	$(x^3)' = 3x^2$
$\mathbb{R}$	$x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$nx^{n-1}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

## II.3 Dérivées et opérations

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $I$ ,  $k$  et  $m$  des réels (des constantes).

$I$	$f$ de la forme	Dérivée de $f$	Notation « abusive »	Exemples
$I$	$k \times u$	$k \times u'$	$(ku)' = ku'$	$(-3x^4)' = -12x^3$ ou $\left(\frac{x^3}{4}\right)' = \frac{3x^2}{4}$
$I$	$u + v$	$u' + v'$	$(u + v)' = u' + v'$	$\left(2x + \frac{1}{x}\right)' = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$
$I$	$u \times v$	$u'v + uv'$	$(u \times v)' = u'v + uv'$	$(x \times \sqrt{x})' = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
$I$ avec $v$ non nul sur $I$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$
$I$ avec $v$ non nul sur $I$	$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{1}{3+2x^2}\right)' = \frac{-4x}{(3+2x^2)^2}$
$I$	$u^2$	$2u'u$	$(u^2)' = 2u'u$	$\left((1+x+x^2)^2\right)' = 2(1+2x)(1+x+x^2)$

### III Compléments de dérivation

#### III.1 Dérivée de la fonction composée

##### Propriété 4 (Admis)

Soit  $v$  une fonction dérivable sur un intervalle  $J$  et  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  tel que pour tout réel  $x$  appartenant à  $I$ ,  $u(x)$  appartient à  $J$ .

La fonction composée  $v \circ u$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u' \quad \text{ou} \quad \forall x \in I, \quad v(u(x))'(x) = v'(u(x))(x) \times u'(x)$$

##### Propriété 5 (Admis)

Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , et si  $n$  quand  $n$  est strictement négatif, la fonction  $u$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $u$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$$



##### Exemple de rédaction

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (3x^2 - 5x + 1)^4$ .

- $f$  est de la forme  $f = u^4$  avec  $u(x) = (3x^2 - 5x + 1)$  et  $u'(x) = 6x - 5$ .
- Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f' = 4u'u^3$  donc pour tout réel  $x$  on a :

$$f'(x) = 4(6x + 5)(3x^2 - 5x + 1)^3$$

On en déduit directement que :

##### Propriété 6

1. Si  $u$  est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle  $I$ , alors la fonction  $\sqrt{u}$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

2. Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , alors la fonction  $e^u$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(e^u)' = u' \times e^u$$



##### Exemple de rédaction

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{x^2+3x+1}$ .

- $f$  est de la forme  $f = e^u$  avec  $u(x) = (x^2 + 3x + 1)$  et  $u'(x) = 2x + 3$ .
- Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f' = u' e^u$  donc pour tout réel  $x$  on a :

$$f'(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x+1}$$

## III.2 Dérivée seconde

**Définition 4** (Dérivée seconde  $f''$ )

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$  et telle que la dérivée  $f'$  soit aussi dérivable sur  $I$ .  
La dérivée seconde de la fonction  $f$  sur  $I$  est la fonction dérivée de la dérivée de  $f$ , on la note  $f''$ .

**Exemple de rédaction**

Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 5$ .

- Alors  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$  on a :

$$g'(x) = 3x^2 - 4x + 7$$

- Alors  $g'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$  on a :

$$g''(x) = 6x - 4$$

**Exemple de rédaction**

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{x^2+3x+1}$ .

- $f$  est de la forme  $f = e^u$  avec  $u(x) = (x^2 + 3x + 1)$  et  $u'(x) = 2x + 3$ .

Alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f' = u' e^u$  donc pour tout réel  $x$  on a :

$$f'(x) = (2x + 3) e^{x^2+3x+1}$$

- $f'$  est de la forme  $f' = u \times v$  avec :

$u(x) = 2x + 3$	$u'(x) = 2$
$v(x) = e^{x^2+3x+1}$	$v'(x) = (2x + 3) e^{x^2+3x+1}$

- Alors  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(f')' = f'' = u'v + uv'$  donc pour tout réel  $x$  on a :

$$f''(x) = 2e^{x^2+3x+1} + (2x + 3) \times (2x + 3) e^{x^2+3x+1}$$

Soit après factorisation :

$$f''(x) = \left( (2x + 3)^2 + 2 \right) e^{x^2+3x+1}$$

## IV Convexité

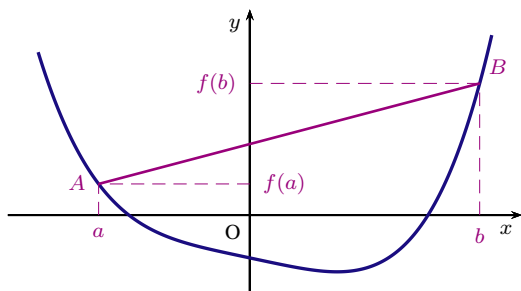
### IV.1 Fonction convexe, fonction concave

#### Définition 5

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et de courbe  $\mathcal{C}_f$ .

•  $f$  convexe.

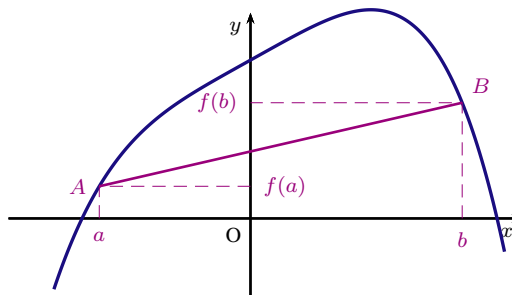
Si pour tous points distincts A et B de la courbe  $\mathcal{C}_f$ , le segment [AB] est située "au-dessus" de la courbe  $\mathcal{C}_f$  alors on dit que  $f$  est convexe sur  $I$ .



Mémo : "ConVexe"  $\implies$  **V** (Forme de la courbe en V).

•  $f$  concave.

Si pour tous points distincts A et B de la courbe  $\mathcal{C}_f$ , le segment [AB] est située "au-dessous" de la courbe  $\mathcal{C}_f$  alors on dit que  $f$  est concave sur  $I$ .



Mémo : "ConcAve"  $\implies$  **A** (Forme de la courbe en A).

### IV.2 ROC : Convexité des fonctions deux fois dérivables

#### Propriété 7

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

**Fonction conVexe.**

Les proposition suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est conVexe sur  $I$ .
2.  $f'$  est croissante sur  $I$ .
3.  $f''$  est positive sur  $I$ .
4. La courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de ses tangentes.

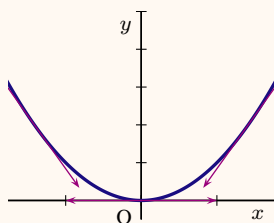
**Fonction concAve.**

Les proposition suivantes sont équivalentes :

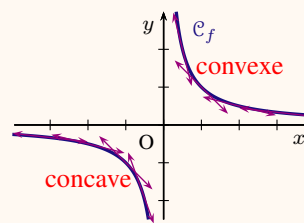
1.  $f$  est concAve sur  $I$ .
2.  $f'$  est décroissante sur  $I$ .
3.  $f''$  est négative sur  $I$ .
4. La courbe  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessous de ses tangentes.



#### Exemple



La fonction carré  $x \mapsto x^2$  est convexe.



La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est concave sur  $] -\infty; 0[$  et convexe sur  $]0; +\infty[$



**Remarque**

Une fonction convexe croissante croît de plus en plus fortement et fonction convexe décroissante décroît de plus en plus faiblement.



**ROC 1 : ROC Exigible**

On va montrer l'implication : « Si  $f''$  est positive sur  $I$ , alors la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de ses tangentes »

- Soit  $f$  une fonction définie et deux fois dérivable sur  $I$ . On suppose de plus que  $f''$  est positive sur  $I$ .

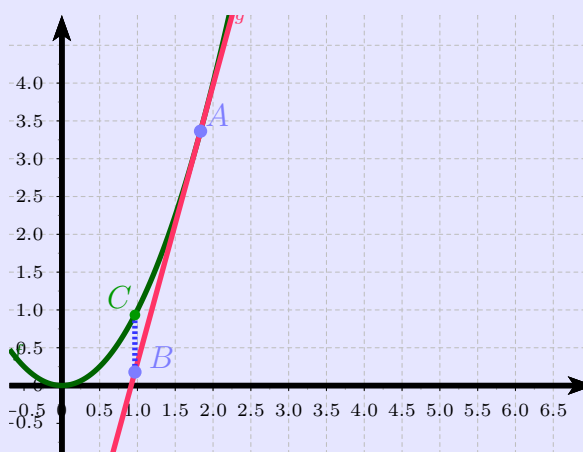
- Équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A(a; f(a))$ .

Soit  $a$  un réel de  $I$ , la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$  est d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

On notera l'ordonnée :  $y = t(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

- Écart entre un point  $C(x; f(x))$  de la courbe et un point  $B(x; t(x))$  de la tangente.



On va donc chercher à montrer que l'écart entre les ordonnées du point  $C(x; f(x))$  de la courbe et du point  $B(x; t(x))$  de la tangente est toujours positif.

On pose alors :

$$g(x) = f(x) - t(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$$

Soit :

$$g(x) = f(x) - f'(a)x + \underbrace{(af'(a) - f(a))}_{\text{Constante}}$$

La fonction  $g$  est dérivable sur  $I$  et sur cet intervalle :

$$g'(x) = f'(x) - f'(a)$$

- On utilise le fait que  $f''$  est supposée positive.

Comme  $f''$  est positive sur  $I$ , la fonction  $f'$  est croissante sur  $I$  et donc elle conserve l'ordre soit :

$$x \leq a \implies f'(x) \leq f'(a) \implies g'(x) = f'(x) - f'(a) \leq 0$$

Et de même  $x \geq a \implies g'(x) \geq 0$  De ce fait on peut dresser le tableau de variation de la fonction  $g$ , qui admet un minimum en  $a$  avec :

$$g(a) = f(a) - f'(a)a + (af'(a) - f(a)) = 0$$

$x$	$a$		
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Variations de $g$			

- On en déduit que  $g$  est toujours positive sur  $I$ . La courbe  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de ses tangentes.



**Exemple**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^5 - 5x^4$ .

La fonction  $f$  est dérivable en tant que fonction polynôme sur  $\mathbb{R}$ . Sa dérivée est la fonction  $f'$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3$$

Sa dérivée seconde est la fonction  $f''$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3)$$

Les variations de  $f'$  se déduisent du signe de sa dérivée  $f''$ .

Notons que pour tout réel  $x$  on a :  $20x^2 \geq 0$  donc  $f''(x)$  est du même signe que  $(x - 3)$ . D'où le tableau :

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
signe de $f''(x)$	-	0	+
variations de $f'$			
convexité de $f$	<b>CONCAVE</b>		<b>CONVEXE</b>

$f$  est concave sur  $]-\infty; 3]$  et convexe sur  $[3; +\infty[$ .

### IV.3 Point d'inflexion

#### IV.3.1 Définition

##### Propriété 8

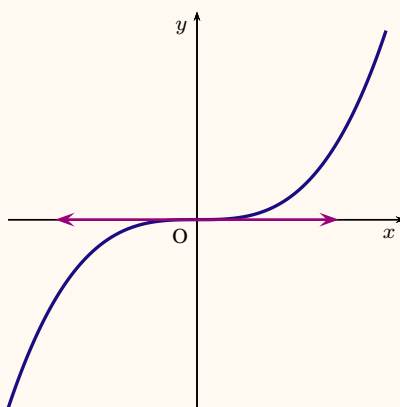
Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.  
S'il existe un point  $A$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$  tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que  $A$  est un point d'inflexion.

#### IV.3.2 Exemples



##### Exemple

La courbe représentative de la fonction cube définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$  admet comme point d'inflexion l'origine  $O(0; 0)$  du repère.



Soit  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction cube.

La tangente au point  $O$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  est l'axe des abscisses d'équation  $y = 0$ .

- Pour  $x \leq 0$ ,  $f(x) \leq 0$  donc la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au dessous de la tangente en  $O$  sur  $]-\infty; 0]$ .
- Pour  $x \geq 0$ ,  $f(x) \geq 0$  donc la courbe  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de la tangente en  $O$  sur  $[0; +\infty[$ .

La courbe  $\mathcal{C}_f$  traverse sa tangente en  $O$  donc  $O(0; 0)$  est un point d'inflexion.

#### IV.3.3 Applications

##### Définition 6

- En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
- Si la dérivée  $f'$  change de sens de variation en  $a$  alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse  $a$ .
- Si la dérivée seconde  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $a$  alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse  $a$ .

IV.3.4 Exemple



**Exemple**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^5 - 5x^4$$

Sa dérivée est la fonction  $f'$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3$$

Sa dérivée seconde est la fonction  $f''$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f''(x) = 20x^2(x - 3)$$

L'équation  $f''(x) = 0$  admet deux solutions  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 3$ .

Notons que pour tout réel  $x$ , on a :  $20x^2 \geq 0$  donc  $f''(x)$  est du même signe que  $x - 3$ .

Les variations de  $f'$  se déduisent du signe de sa dérivée  $f''$ . D'où le tableau :

$x$	$-\infty$	0	3	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	-	0	0	+
Convexité	$f$ concave	$f$ concave	$f$ convexe	

En tenant compte des changements de concavité, on en déduit que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un seul point d'inflexion, le point  $A(3; f(3))$ .

En effet :

- $f''(0) = 0$  mais, sur l'intervalle  $] -\infty; 3[$ ,  $f''(x) \leq 0$  donc le point de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction  $f$  est concave sur  $] -\infty; 3[$ ).
- $f''$  s'annule en  $x = 3$  en changeant de signe donc le point  $A(3; f(3))$  est un point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_f$ . La fonction  $f$  change de concavité en ce point, elle est concave sur  $] -\infty; 3[$  et convexe sur  $[3; +\infty[$ .

