



ROC
Les **ROC**, (**R**estitutions **O**rganisées de **C**onnaissances), sont les démonstrations du cours à connaître. Elle sont indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale Spécialité Mathématiques entré en vigueur à la rentrée 2020. Ce chapitre compte **1 ROC**.

I Limite à l'infini

I.1 Limite infinie en l'infini

I.1.1 Limite infinie quand x tend vers $+\infty$

Définition 1 (Limite $+\infty$ en $+\infty$)

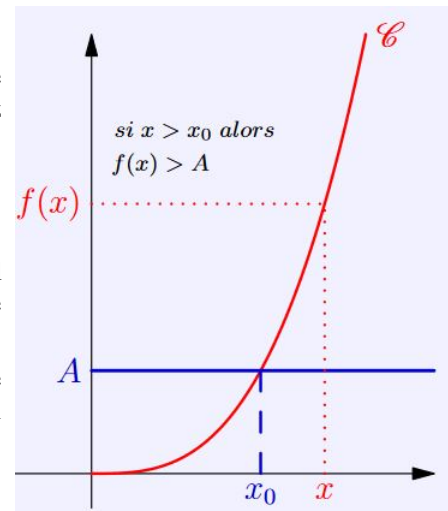
- Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie que l'intervalle $[A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Plus rigoureusement

Soit une fonction f définie sur D_f telle qu'il existe un réel a pour lequel $[a ; +\infty[$ est inclus dans D_f . On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$.

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie que, quel que soit le réel A , il existe $x_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in D_f$, si $x > x_0$, alors $f(x) > A$.



Exemple

Les fonctions de références de limite $+\infty$ en $+\infty$:

$$x \mapsto x, \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto x^n \text{ (avec } n \geq 1), \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

Définition 2 (Limite $-\infty$ en $+\infty$)

De même, dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie que l'intervalle $] -\infty ; A]$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

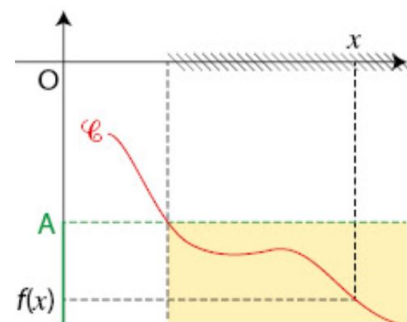


Exemple

Les fonctions de références de limite $-\infty$ en $+\infty$:

$$x \mapsto -x, \quad x \mapsto -x^2, \quad x \mapsto -x^n \text{ (avec } n \geq 1)$$

$$x \mapsto -\sqrt{x}$$



I.1.2 Limite infinie quand x tend vers $-\infty$

On définit de façon analogue les limites infinies en $-\infty$ et on a par exemple :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$;

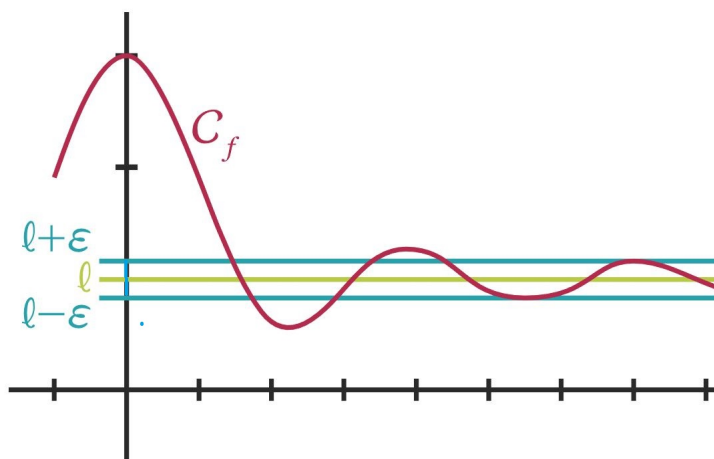
I.2 Limite finie en l'infini

Définition 3 (Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$)

- Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ , contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

- On définit de façon analogue la limite finie en $-\infty$.



Exemple

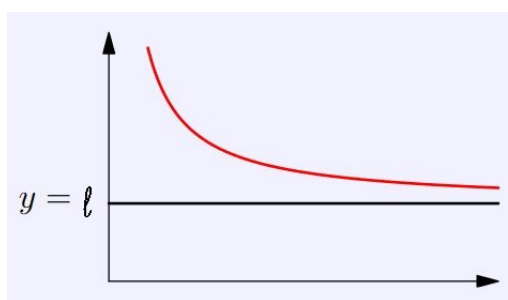
On a par exemple :

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ avec $n \geq 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Définition 4 (Asymptote horizontale)

Si une fonction f a pour limite le nombre réel ℓ quand x tend vers $+\infty$, on dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative \mathcal{C}_f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \implies (d) : y = \ell \text{ asymptote à } \mathcal{C}_f \text{ en } +\infty$$



II Limite en un réel a

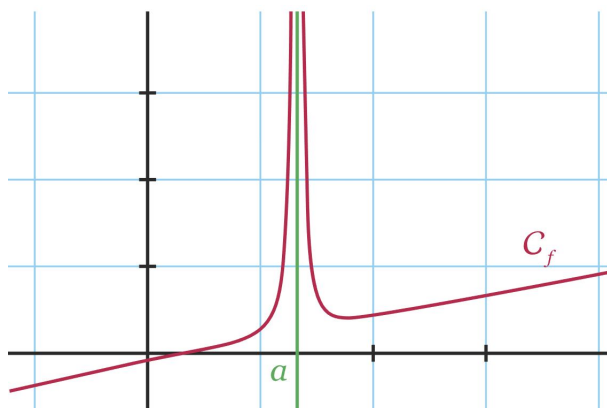
II.1 Limite infinie en un réel a

Définition 5 (Limite en un réel)

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a quand tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$, avec A réel, contient toutes les images $f(x)$ pour x assez proche de a . On écrit

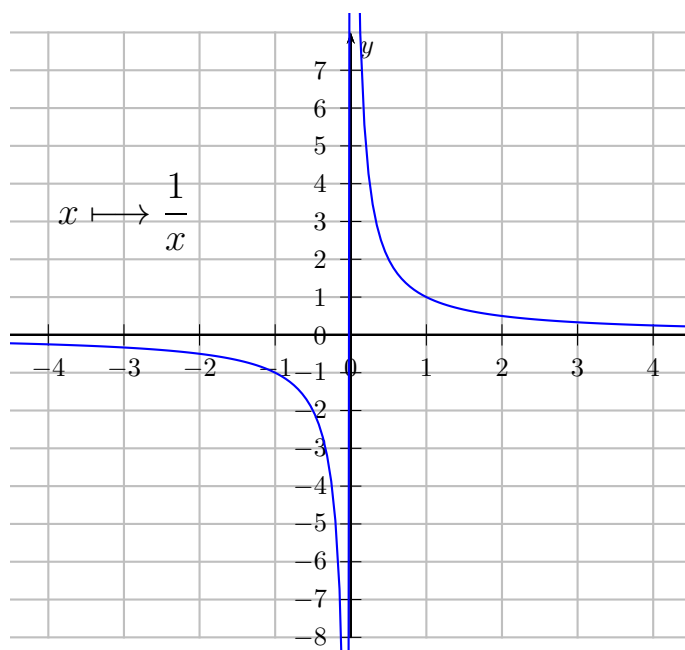
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

- Interprétation graphique** : Dans ce cas, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à \mathcal{C}_f .
- On définit de façon analogue f a pour limite $-\infty$ en a .



II.2 Limite infinie en un réel à droite et à gauche

Les limite peuvent être différente selon que l'on tend vers a par valeur supérieures (vers la droite), ou par valeurs inférieures (par la gauche). Considérons par exemple la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$.



Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{ce que l'on note aussi} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x) = \frac{1}{x}$	10	100	1000	10000

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{ce que l'on note aussi} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
$f(x) = \frac{1}{x}$	-10	-100	-1000	-10000

II.3 Exemples à connaître



Exemple

- Si $n \geq 2$ entier pair :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

Ce qui signifie que les limites à droite et à gauche sont identiques.

- Si $n \geq 1$ entier impair :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$$

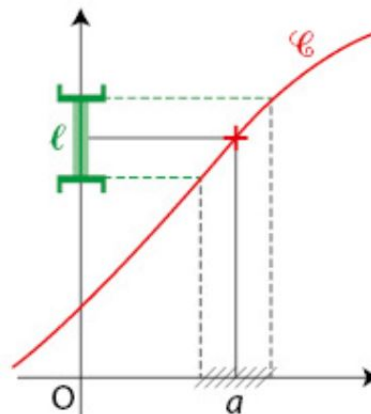
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

II.4 Limite finie ℓ en un réel a

Définition 6 (Limite finie ℓ en un réel a)

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a quand tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a . On écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$



II.5 Exemples à connaître (admis)



Exemple

Soit a un réel

- Si $a \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$
- Si P est un polynôme, $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a).$
- Si F est une fonction rationnelle (quotient de polynômes) définie en a , $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a).$

- $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a.$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a.$
- $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a.$

On verra que cela traduit la continuité d'une fonction en a .

III Opérations sur les limites

III.1 Somme

Limite de f	l	l	$+\infty$	$-\infty$
Limite de g	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de $(f + g)$	$l + l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Forme indéterminée : $\infty - \infty$

Dans le cas $\lim f(x) = -\infty$ et $\lim g(x) = +\infty$ on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $(f + g)$, il s'agit d'une **forme indéterminée**.

III.2 Produit

Limite de f	l	$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de g	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $(f \times g)$	$l \times l'$	$*\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Forme indéterminée : $0 \times \infty$

* : + ou - appliquer la règle des signes.

Dans le cas $\lim f(x) = 0$ et $\lim g(x) = \pm\infty$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $(f \times g)$, il s'agit d'une **forme indéterminée**.

III.3 Quotient

Limite de f	l	l	$+\infty$	$-\infty$
Limite de g	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' \neq 0$	$l' \neq 0$
Limite de $\left(\frac{f}{g}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$

Formes indéterminées : $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

* : + ou - appliquer la règle des signes.

Dans les cas :

- $\lim f(x) = \pm\infty$ et $\lim g(x) = \pm\infty$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $\left(\frac{f}{g}\right)$, il s'agit de **formes indéterminées**.
- $\lim f(x) = 0$ et $\lim g(x) = 0$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $\left(\frac{f}{g}\right)$, il s'agit d'une **forme indéterminée**.

III.4 Exemple de rédaction

1. Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$. Étudier les limites de f en 2.

Limite par valeurs supérieures (à droite)

Aide : si x tend vers 2 par valeurs supérieures (à droite), on peut évaluer le signe d'une expression en remplaçant x par 2,001 par exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} (1-x) = -1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (2-x) = 0^- \end{array} \right. \Bigg| \xRightarrow{\text{Par quotient}} \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty}$$

Donc la courbe \mathcal{C}_f présente une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

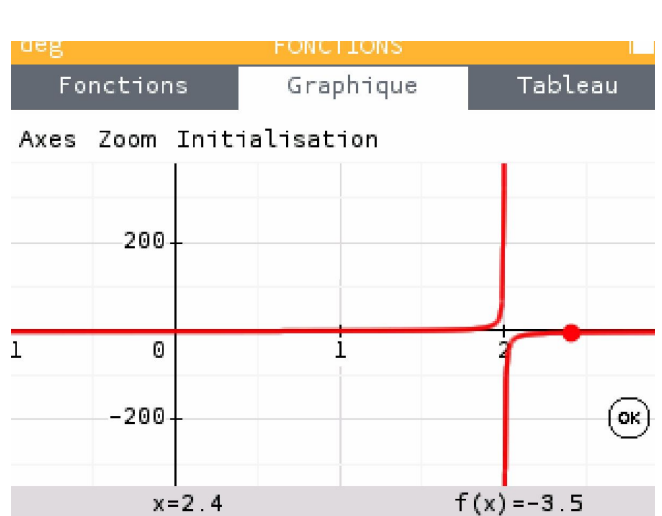
Limite par valeurs inférieures (à gauche)

Aide : si x tend vers 2 par valeurs inférieures (à gauche), on peut évaluer le signe d'une expression en remplaçant x par 1,999 par exemple.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} (1-x) = -1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (2-x) = 0^+ \end{array} \right. \Bigg| \xRightarrow{\text{Par quotient}} \boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty}$$

Donc la courbe \mathcal{C}_f présente une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

- Remarque importante : avec la calculatrice
On peut retrouver ces résultats avec le graphe de f ou avoir une idée des limite avec un tableau de valeurs autour de 2.



Régler l'intervalle

1.96	24
1.97	32.33333
1.98	49
1.99	99
2	undef
2.01	-101
2.02	-51
2.03	-34.33333

2. Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = x^2 + 3x + \frac{-1}{x-1}$. Étudier les limites de f en 1 à droite et à gauche.
A vous de jouer.

III.5 Pour lever l'indétermination



Méthode : pour lever l'indétermination

Pour étudier la limite d'une fonction on utilise les opérations élémentaires sur les limites. Si l'on est confronté à une des 4 formes indéterminées on transforme l'expression. On peut essayer les méthodes suivantes :

- Limite quand x tend vers l'infini (c'est comme pour les suites).
 - Factoriser les expressions par le terme qui tend le plus vite vers l'infini, le terme dominant avec dans cet ordre :
$$\sqrt{x} \rightarrow x \rightarrow x^2 \rightarrow x^3 \dots$$
 - Penser à l'expression conjuguée si des racines carrées apparaissent.
 - On peut aussi majorer l'expression, en valeur absolue ou trouver un encadrement par des fonctions dont on connaît les limites et appliquer les théorèmes de comparaison et d'encadrement qui suivent.
- Limite quand x tend vers a .
 - Dans le cas d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ quand x tend vers a pour une fraction rationnelle, il faut essayer de factoriser numérateur et dénominateur par $(x - a)$.
 - Dans le cas d'une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ quand x tend vers a , on peut aussi penser au taux d'accroissement et à la définition du nombre dérivé.



Remarque

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, on ne peut rien conclure a priori de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$.

- On montrera par exemple que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$
- Mais par contre la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sin x}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

IV Limites de fonctions composées

IV.1 Exemple

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; -1]$ par :

$$f : x \mapsto f(x) = \sqrt{1-x}$$

On ne peut pas écrire f comme somme, produit ou quotient de fonctions usuelles et appliquer les théorèmes précédents. On va décomposer cette fonction en deux fonctions usuelles par **composition**.

La fonction f peut être décrite, comme dans un programme de calcul vu au collège par :

Prendre un réel de $] -\infty ; -1]$	x	
Multiplier x par (-1) et ajouter 1	$1-x$	$1-x = Y$
Prendre la racine carrée	$\sqrt{1-x}$	\sqrt{Y}

On va résumer ce programme par un schéma de composition :

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{u} & 1-x \\ & & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \xrightarrow{v} \sqrt{Y} \end{array}$$

La fonction v est la fonction racinée carrées $Y \mapsto \sqrt{Y}$ et la fonction u est la fonction affine $x \mapsto 1-x$.

On notera alors pour tout réel x de $] -\infty ; -1]$:

$$f(x) = \sqrt{1-x} = v(1-x) = v(u(x)) = v \circ u(x)$$

IV.2 Définition

Définition 7

Soit v une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I tel que pour tout réel x de I , $u(x)$ appartient à J .

La **fonction composée u suivi de v** est la fonction noté $v \circ u$, définie sur I par :

$$v \circ u(x) = v(u(x))$$

IV.3 Limites de fonctions composées

On va par exemple calculer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $] -\infty ; -1]$ par :

$$f : x \mapsto f(x) = \sqrt{1-x}$$

On décompose f :

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{u} & 1-x \\ & & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \xrightarrow{v} \sqrt{X} \end{array}$$

La fonction v est la fonction racinée carrées $X \mapsto \sqrt{X}$ et la fonction u est la fonction affine $x \mapsto 1-x$.

On calcule alors la limite par composition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array} \right. \quad \text{par composition} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty}$$

V Théorèmes de comparaison et d'encadrement

V.1 Limite et ordre

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $I = [a; +\infty[$, avec a réel.

Propriété 1

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell'$ et $f \leq g$ sur l'intervalle I alors $\ell \leq \ell'$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell' \\ f \leq g \text{ sur } I \end{cases} \implies \ell \leq \ell'$$

V.2 Théorème d'encadrement dit « des gendarmes »

Théorème 1 (dit « des gendarmes »)

Soit l un réel et f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $I = [a; +\infty[$, telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$



Preuve

Soit J un intervalle ouvert contenant ℓ .

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$, l'intervalle J contient tous les réels $g(x)$ pour x supérieur M_1 .

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$, l'intervalle J contient tous les réels $h(x)$ pour x supérieur M_2 .

On pose $M = \max(M_1; M_2)$, pour tout x supérieur à M , l'intervalle J contient tous les réels $g(x)$ et $h(x)$, or $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ donc J contient tous les réels $f(x)$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

V.3 Théorème de comparaison

Théorème 2

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.

Si pour tout x de $[a; +\infty[$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\begin{cases} \forall x \in I, g(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \xrightarrow{\text{par théorème comparaison}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Si pour tout x de $[a; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

$$\begin{cases} \forall x \in I, g(x) \geq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \xrightarrow{\text{par théorème comparaison}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

VI Fonction exponentielle, limites et croissances comparée (ROC)

VI.1 Rappels de première

VI.1.1 La fonction exponentielle : une définition

Théorème 3 (Théorème et définition)

1. Il existe **une unique** fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
2. On appelle **exponentielle** cette fonction que l'on note **exp**.

VI.1.2 Propriétés et relation fonctionnelle

Propriété 2 (Propriétés immédiates)

- | | | |
|---|----------------------|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. La fonction \exp étant dérivable et continue sur \mathbb{R}. 2. $\exp(0) = 1$. | Pour tout réel x : | <ol style="list-style-type: none"> 4. $\exp(x) \neq 0$; 5. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$. |
| <ol style="list-style-type: none"> 3. $\exp'(x) = \exp(x)$; | | |

VI.1.3 La relation fonctionnelle

Propriété 3 (Relation fonctionnelle)

Pour tout couple de réels $(x ; y)$:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Corollaire 1

Pour tout réel x , on a :

- | | | |
|---|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$. 2. $\exp(nx) = (\exp(x))^n$. | | <ol style="list-style-type: none"> 3. $\exp(x) > 0$. 4. $\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$. |
|---|--|---|

VI.1.4 Nouvelle notation : $\exp(x) = e^x$



La notation e^x

- Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n$$

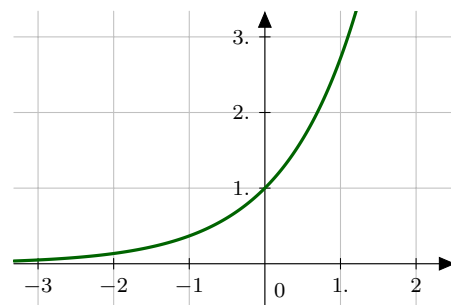
- On notera e le réel $\exp(1)$; on a alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = e^n$.
- On notera, par convention, $\exp(x) = e^x$ pour tout réel x .
- Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle assurent que cette notation reste cohérente avec la notation usuelle des puissances.

VI.1.5 Étude de la fonction exponentielle

Propriété 4

La fonction exponentielle est définie sur \mathbb{R} et strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $(e^x)' = e^x$			+	
Variations de exp		1	$e \approx 2.718$	$+\infty$



Propriété 5

Du sens de variation de la fonction exponentielle on en déduit que :

1. $e^x < 1 \iff x < 0$; | 2. $e^x > 1 \iff x > 0$; | 3. $e^x = 1 \iff x = 0$.

VI.1.6 La fonction e^u

Propriété 6 (Admis)

Si la fonction u définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} alors la fonction $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$(e^u)' = u' e^u$$

VI.2 Limites de la fonction exponentielle

Lemme 1 (A savoir redémontrer)

Pour tout réel x on a :

$$e^x \geq x + 1$$



Preuve

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - (x + 1)$.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = e^x - 1$$

D'après les variations de la fonction exponentielle on a :

$$\begin{cases} f'(x) = e^x - 1 = 0 \iff x = 0 \\ f'(x) = e^x - 1 > 0 \iff x > 0 \end{cases} \implies f'(x) = e^x - 1 < 0 \iff x < 0$$

Donc puisque $f(0) = e^0 - (0 + 1) = 1 - 1 = 0$ on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f			

De ce fait la fonction f est positive sur \mathbb{R} soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - (x + 1) \geq 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

Propriété 7 (Limites à savoir redémontrer)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Donc la droite des abscisses (d'équation $y = 0$) est asymptote horizontale de la courbe de la fonction exponentielle en $-\infty$.



Preuve

1. Pour tout réel x on a montré que $e^x \geq x + 1$, on applique alors le théorème de comparaison.

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty \end{cases} \xRightarrow{\text{par théorème comparaison}} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

2. Pour tout réel x on a :

$$e^x = e^{-(-x)} = \frac{1}{e^{-x}}$$

On applique alors les propriétés de composition des limites :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{cases} \xRightarrow{\text{par composition des limites}} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

VI.3 Croissances comparées (ROC)

Propriété 8 (Croissances comparées (ROC))

1. Pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

2. Conséquence (admis)

Pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$



ROC 1 : ROC Exigible

Remarque : si $n \leq 0$ il n'y a pas de forme indéterminée, donc on va ici traiter le cas où $n \geq 1$.

Pour tout réel X on a d'après le lemme VI.2 page 10 on a :

$$e^X \geq X + 1$$

Donc en appliquant cette inégalité à $X = \frac{x}{n+1}$ avec n entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1} + 1 \geq \frac{x}{n+1}$$

Donc

$$e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{1}{n+1} x$$

On compose alors par la fonction $x \mapsto x^{n+1}$, avec $n \geq 1$, qui est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

Pour tout réel $x \geq 0$ (et $n \geq 1$) on obtient donc :

$$\underbrace{\left(e^{\frac{x}{n+1}} \right)^{n+1}}_{e^x} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}_k x^{n+1}$$

C'est à dire en posant $k = \left(\frac{1}{n+1} \right)^{n+1} > 0$ et puisque $\left(e^{\frac{x}{n+1}} \right)^{n+1} = e^{\frac{x}{n+1} \times (n+1)} = e^x$:

$$\left(e^{\frac{x}{n+1}} \right)^{n+1} = e^x \geq k x^{n+1}$$

Et donc

$$e^x \geq x^n \times k x \implies \frac{e^x}{x^n} \geq k x$$

On va conclure en invoquant le théorème de comparaison :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+, \frac{e^x}{x^n} \geq k x \text{ avec } k > 0 \text{ et } n \geq 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} k x = +\infty \text{ car } k > 0 \end{cases} \implies \text{par théorème de comparaison } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

VII Lever une forme indéterminée avec le nombre dérivé

L'utilisation de la définition du nombre dérivé.

VII.1 Rappel de première

Propriété 9

1. Le réel $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a ;
2. Le réel $f'(a)$ est la limite quand h tend vers 0 du taux $t(h)$:

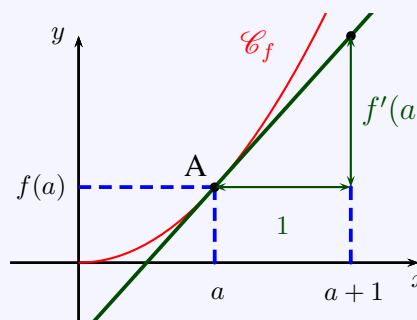
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

3. Le réel $f'(a)$ est la limite quand x tend vers a de :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

4. Le réel $f'(a)$ est le coefficient directeur de la **tangente à la courbe** \mathcal{C}_f au point $A(a; f(a))$ et l'équation de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



VII.2 Application

Propriété 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$



Preuve

Il s'agit de la définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0. En effet on sait que la fonction exponentielle est dérivable en 0 et que $(e^x)' = e^x$ donc en notant $f(x) = e^x$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e^0 = 1$$

VII.3 Bilan des limites de la fonction exponentielle

Propriété 11 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) limites usuelles :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

- (2) (nombre dérivé en 0) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

- (3) croissances comparées pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \end{cases}$$