Math93.com

Intégration

Terminale Spécialité maths

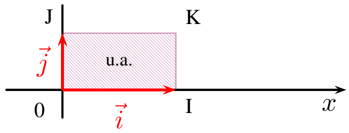
ROC

Les **ROC, (Restitution Organisée de Connaissances)**, sont les démonstrations du cours à connaître indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale S entré en vigueur à la rentrée 2012.
Ce chapitre compte 2 ROC : le théorème 1 page 4, le théorème 2 page 6 et une activité algorithmique exigible.

I Intégrale d'une fonction continue et positive

I.1 Unité d'aire

Soit $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée u.a, est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec $I(0;1)$, $J(0;1)$ et $K(1;1)$.



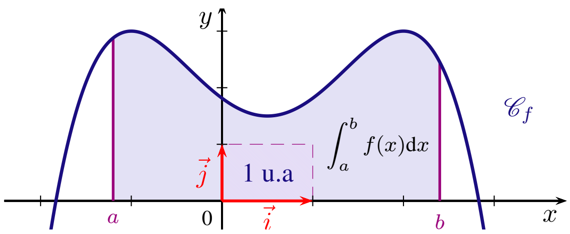
I.2 Intégrale d'une fonction continue et positive

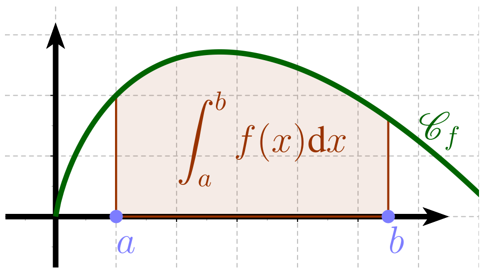
I.2.1 Définition

Définition 1

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$





Remarque

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ » ou encore « somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, car le domaine $\mathcal{D}_f$ est alors réduit à un segment.

I.2.2 Exemples

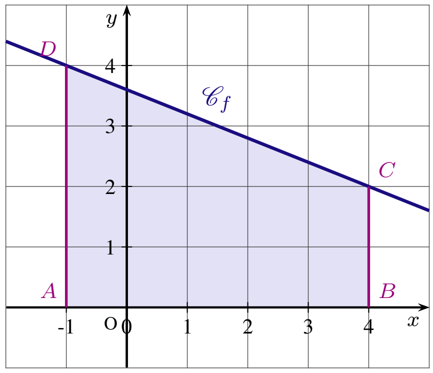
Exemple 1

Calculons $\displaystyle\int_{-1}^{4} (-0,4x + 3,6)\,\mathrm{d}x$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x + 3,6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$

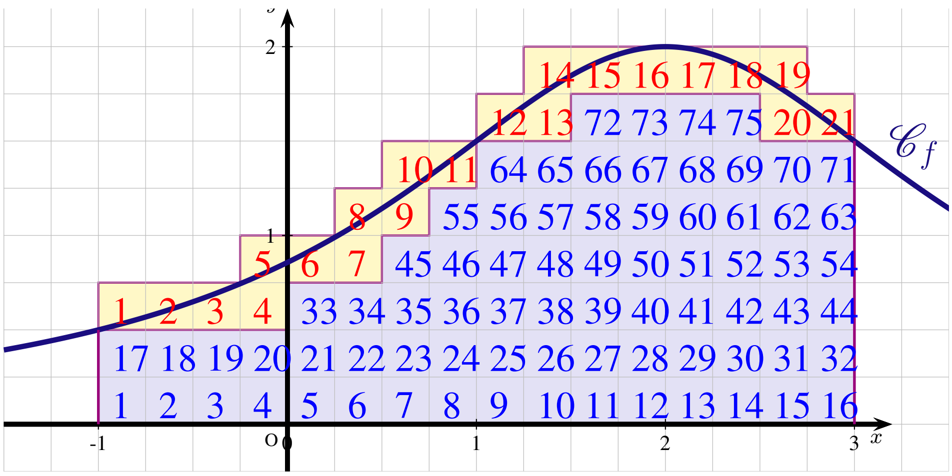
L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{4} (-0,4x + 3,6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

$$\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x = \frac{(AD+BC)\times AB}{2} = \frac{(4+2)\times 5}{2} = 15$$



Exemple 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{6}{x^2 - 4x + 7}$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous. Déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.



Sur $[-1;3]$, la fonction f est continue et positive. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$.

On peut déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du quadrillage.

- Un carreau bleu représente $\dfrac{1}{16}$ d'unité d'aire donc la partie blue située sous la courbe représente $75 \times \dfrac{1}{16}$ d'unités d'aire. L'aire cherchée est donc supérieure à cette valeur.
- On complète pour majorer l'aire cherchée par les 21 autres carrés ce qui représente : $\dfrac{21+75}{16} = 6$ unités d'aire.

D'où l'encadrement : $\boxed{\dfrac{75}{16} \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 6}$

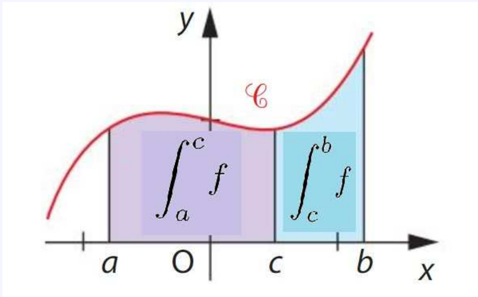
I.3 Premières propriétés

Soit f continue et positive sur un segment $[a\ ;\ b]$. Les propriétés sur les aires permettent d'affirmer que :

Propriété 1 (Additivité des aires (ou relation de **Chasles**))

Si $c \in [a\ ;\ b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$



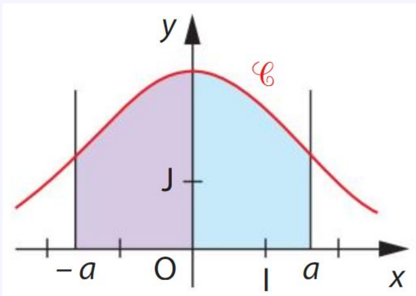
Propriété 2 (Conservation par symétrie)

Si la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées alors

$$\boxed{\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}$$

et

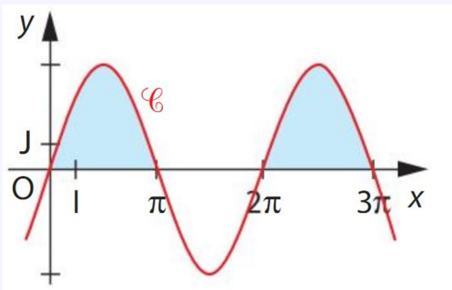
$$\boxed{\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}$$



Propriété 3 (Conservation par translation)

Par exemple la courbe de la fonction sinus est invariante par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{OI}$ alors

$$\boxed{\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0+2\pi}^{\pi+2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x}$$



II Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

II.1 Lien entre intégrale et primitive : Théorème fondamentale (ROC 1)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Théorème 1 (ROC 1)

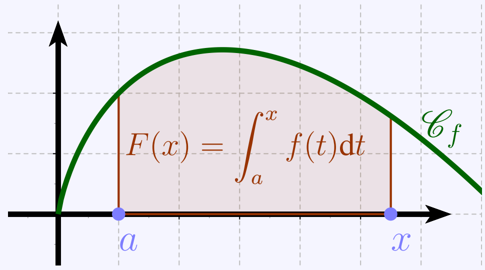
Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et a pour dérivée f. On a donc :

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \Longrightarrow F'(x) = f(x)}$$

F est donc **l'unique primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ qui s'annule en a.**



ROC 1 : Exigible

On va démontrer le théorème 1 uniquement dans le cas où f est croissante sur $[a\ ;\ b]$. C'est le seul cas qui est explicitement au programme.
Soit $x_0 \in [a\ ;\ b]$ et h tel que $(h+x_0) \in [a\ ;\ b]$.

- Si $h > 0$.
  - Dans ce cas par définition $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$, est l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0$ et $x = x_0 + h$.
  - Notons F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

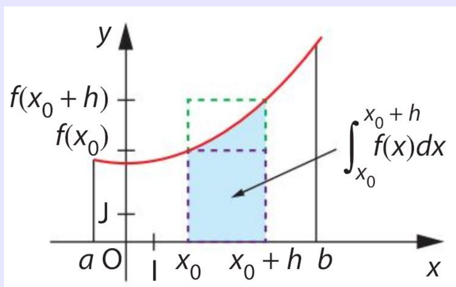
La remarque précédente implique que l'aire $\mathcal{A}$ est donnée, en unités d'aire par :

$$\mathcal{A} = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'après les propriété élémentaires sur les aires

$$\mathcal{A} = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{A} = F(x_0+h) - F(x_0)$$



  - Puisque f est croissante sur $[a\ ;\ b]$, cette aire est comprise entre celle :
    * du rectangle de base $[x_0\ ;\ x_0+h]$ et de hauteur $f(x_0)$;
    * du rectangle de base $[x_0\ ;\ x_0+h]$ et de hauteur $f(x_0+h)$;

De ce fait on a :

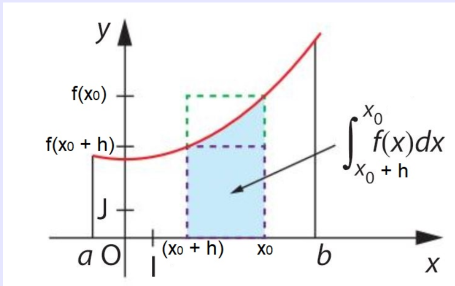
$$h \times f(x_0) \leqslant \underbrace{F(x_0+h) - F(x_0)}_{\mathcal{A}} \leqslant h \times f(x_0+h)$$

Puisque $h > 0$, on peut diviser les membres par h et on obtient :

$$\boxed{f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)}$$

- Si $h < 0$.
  - Si h est strictement négatif, on montre de façon similaire le même encadrement. On a juste à prendre en compte que dans ce cas $x_0 + h < x_0$.

$$\mathcal{A} = \int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t = F(x_0) - F(x_0+h)$$



  - Puisque f est croissante sur $[a\ ;\ b]$, cette aire est comprise entre celle :
    * du rectangle de base $[x_0 + h\ ;\ x_0]$ et de hauteur $f(x_0+h)$;
    * du rectangle de base $[x_0 + h\ ;\ x_0]$ et de hauteur $f(x_0)$;

    De ce fait on a :

$$h \times f(x_0+h) \leqslant \underbrace{F(x_0) - F(x_0+h)}_{\mathcal{A}} \leqslant h \times f(x_0)$$

Puisque $h < 0$, on peut diviser les membres par h (en changeant l'ordre) et on obtient :

$$\boxed{f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)}$$

- Limite quand h tend vers 0.
  Quand h tend vers 0, la continuité de f permet d'écrire que :

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

De ce fait d'après le théorème d'encadrement (ou des gendarmes) appliqué à l'inégalité :

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

On obtient :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Cela signifie que la fonction F est dérivable en x_0 et que :

$$\boxed{F'(x_0) = f(x_0)}$$

- Primitive.
  D'après la définition de la primitive, la fonction F est bien une primitive de f puisque $F' = f$.
  Par ailleurs on a :
  $$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \Longrightarrow F(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$$
- Unicité.
  On a vu qu'il existe une unique primitive de f telle que $F(a) = 0$. C'est donc F.

II.2 Exemple

Exemple 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Si x est un réel de l'intervalle $[-1;4]$, la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$$

est égale à l'aire $\mathcal{A}$ du trapèze colorié soit :

$$\mathcal{A} = \frac{(AD+BC)\times DC}{2}$$

On a donc

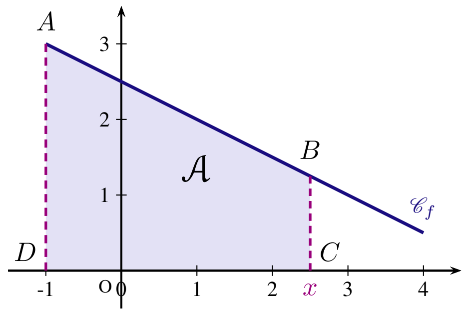
$$F(x) = \frac{(3+(-0,5x+2,5))\times(x+1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}$$

La fonction F est dérivable sur $[-1;4]$ et

$$F'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x)$$

$$\mathcal{A} = \frac{(AD+BC)\times DC}{2}$$

avec $\begin{cases} AD = 3 \\ BC = f(x) = -0,5x+2,5 \\ CD = (x+1) \end{cases}$



II.3 Conséquence (ROC 2)

Théorème 2 (ROC 2)

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

ROC 2 : Exigible

On va montrer que toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

- Comme le programme le précise, on admet qu'une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$ admet un minimum m sur $[a\ ;\ b]$ c'est à dire que pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$ on a :
  $$f(x) \geqslant m = f(x_0)$$
- 1er cas : $m \geqslant 0$.
  Si ce minimum est positif ou nul, la fonction f est continue et positive sur $[a\ ;\ b]$ donc d'après le théorème 1 page 4, elle admet une primitive définie sur $[a\ ;\ b]$ par :
  $$F\ :\ x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

- 2e cas : $m < 0$.
  Si ce minimum est strictement négatif, on peut le noter $-m$, avec $m > 0$. On a alors pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$:
  $$f(x) \geqslant -m$$
  Soit la fonction g définie sur $[a\ ;\ b]$ par :
  $$g(x) = f(x) + m$$
  On a alors pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$:
  $$f(x) \geqslant -m \Longrightarrow g(x) = f(x) + m \geqslant -m + m = 0$$
  La fonction g est donc continue et positive sur $[a\ ;\ b]$ donc d'après le théorème 1 page 4, elle admet une primitive définie sur $[a\ ;\ b]$ par :
  $$G \ : \ x \longmapsto G(x) = \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t$$
  De ce fait la fonction f qui est définie par $f(x) = g(x) - m$ admet comme primitive la fonction F définie par
  $$F(x) = G(x) - mx$$
  puisque :
  $$F'(x) = g(x) - m$$

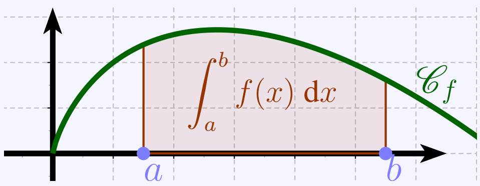
III Calcul de primitives et d'intégrales

III.1 Propriété

Propriété 4

Si f est une fonction <u>continue</u> et <u>positive</u> sur $[a\ ;\ b]$, alors pour F une primitive quelconque de f sur $[a\ ;\ b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$



Preuve

D'après le théorème fondamental (page 4), la fonction H définie sur $[a\ ;\ b]$ ci-dessous est une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$:

$$H(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

Si F est une autre primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ alors on a nécessairement, pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$:

$$F(x) = H(x) + k$$

et donc pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$:

$$F(b) - F(a) = H(b) + k - (H(a) + k) = H(b) - H(a)$$

Or puisque $H(a) = 0$ on obtient :

$$\boxed{F(b) - F(a) = H(b) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t}$$

IV Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

IV.1 Définition

Définition 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a;b]$.
L'intégrale de f entre a à b est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$ que l'on note $\left[\ F(x)\ \right]_a^b$ soit :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[\ F(x)\ \right]_a^b = F(b)-F(a)}$$

Remarques

1. Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.
   En effet, si G est une autre primitive de f sur I, il existe un réel k tel que $G(x)=F(x)+k$ d'où
   $$G(b)-G(a)=(F(b)+k)-(F(a)+k)=F(b)-F(a)$$
2. Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors l'intégrale
   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$
   est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
3. Pour une fonction continue et positive avec $a \leqslant b$, cette définition est cohérente avec la définition en terme d'aire.
4. La fonction
   $$x \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$
   est **LA primitive de f qui s'annule ne a**.

Exemple 4

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \left(x-\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}-\ln(x)-\frac{\mathrm{e}}{x}\right]_1^{\mathrm{e}}\\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\ln(\mathrm{e})-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)-\left(\frac{1^2}{2}-\ln(1)-\frac{\mathrm{e}}{1}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

IV.2 Premières propriétés

Théorème 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel a appartenant à I.

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Preuve

Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$$

Théorème 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Preuve

Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$$

IV.3 Propriétés de l'intégrale

IV.3.1 Positivité

Théorème 5

Positivité Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.

- Si <u>$a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$</u> sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si <u>$a \geqslant b$ et $f \geqslant 0$</u> sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Preuve

Soit F une primitive de f sur I. Pour tout réel x de l'intervalle I, $F'(x) = f(x)$.
Or $f = F' \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ donc F est croissante sur $[a;b]$.

- Par conséquent, si $a \leqslant b$, alors $F(a) \leqslant F(b)$ puisque F est croissante sur $[a\ ;\ b]$.

  On en déduit que $F(b) - F(a) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

- <u>Attention</u>, par contre si $a \geqslant b$ on a $F(a) \geqslant F(b)$ puisque F est croissante sur $[a\ ;\ b]$.

  On en déduit dans ce cas que $F(b) - F(a) \leqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Remarque

Attention la réciproque est fausse :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} \left(-x^2 + 3x + 1\right) \, dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{3} \\ &= \left(-9 + \frac{27}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} + 6 - 2\right) = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Ainsi $\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ mais $f(-1) = -3$

IV.3.2 Linéarité

Théorème 6

Soit f et g continues sur un intervalle I . Pour tous réels a et b de I, et pour tout réel α :

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Preuve

1. Si F et G sont deux primitives respectives de f et g sur I, alors $F+G$ est une primitive sur I de $f+g$.

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x &= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) \\ &= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. Soit F une primitive de f sur I et α un réel.

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(t)\mathrm{d}t &= \alpha F(b) - \alpha F(a) \\ &= \alpha\,(F(b) - F(a)) = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

IV.3.3 Relation de Chasles

Théorème 7

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

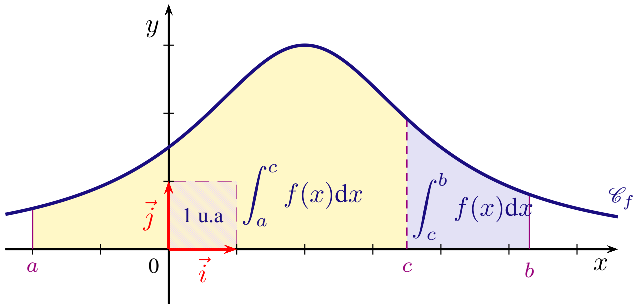
Preuve

Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Interprétation graphique

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$.
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = b$



IV.3.4 Ordre

Théorème 8

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leqslant b$.

- Si $a \leqslant b$ et que pour x compris entre a et b on a $f(x) \leqslant g(x)$ alors :

$$f \leqslant g \text{ sur } [a \ ; \ b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

- **Attention** : Si $a \geqslant b$ et que pour x compris entre b et a on a $f(x) \leqslant g(x)$ alors :

$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Preuve

Si pour tout réel x appartenant à $[a; b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $f(x) - g(x) \leqslant 0$. Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$, la fonction $f - g$ est continue sur $[a; b]$.

- Par conséquent, si $a \leqslant b$ et $f - g \leqslant 0$ alors d'après le théorème 5 (Positivité) page 9 on a :

$$\int_a^b (f-g)(x)\mathrm{d}x \leqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$$

- De même, si $a \geqslant b$ et $f - g \leqslant 0$ alors d'après le théorème 5 (Positivité) page 9 on a :

$$\int_a^b (f-g)(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

Remarque

Attention la réciproque est fausse :

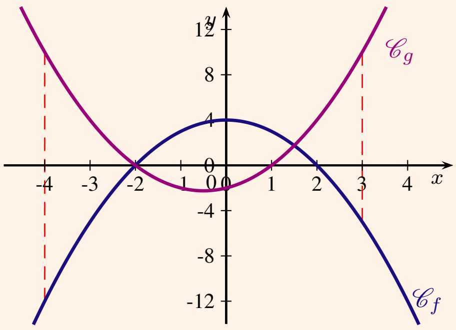
Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2 + x - 2$.

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3} \left(4 - x^2\right) \mathrm{d}x &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3} \\ &= \left(12 - \frac{27}{3}\right) - \left(-16 + \frac{64}{3}\right) = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{3} \left(x^2 + x - 2\right) \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-4}^{3} \\ &= \left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} - 6\right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{16}{2} + 8\right) = \frac{77}{6}\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-4}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-4}^{3} g(x)\mathrm{d}x$ mais nous ne pouvons pas conclure que sur l'intervalle $[-4;3]$, $f(x) \leqslant g(x)$ comme on peut le constater sur le graphique ci-dessous.



IV.3.5 Avec la parité de f

Propriété 5

1. Si f est continue et paire sur $[-a\ ;\ a]$, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées on a :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2 \times \int_{0}^{a} f\ \mathrm{d}x$$

2. Si f est continue et impaire sur $[-a\ ;\ a]$, alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine on a :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

V Intégration par parties

Théorème 9 (Intégration par parties)

Soit u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.
On dit dans ce cas que les fonction **u et v sont « de classe C^1 sur $[a\ ;\ b]$ »**.
On a alors :

$$\boxed{\int_a^b u'v = \left[\ uv\ \right]_a^b - \int_a^b uv'}$$

Méthode

La méthode dans ce genre d'exercice est de bien identifier les fonction u et v. Généralement, l'une des 2 admet une primitive simple, on prendra u', et l'autre a une dérivée plus simple, on posera v.

Exemple

On cherche à calculer :

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\ \mathrm{d}x$$

On écrit $\ln x$ sous la forme :

$$x \longmapsto 1 \times \ln x = u'(x) \times v(x)$$

On pose :

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

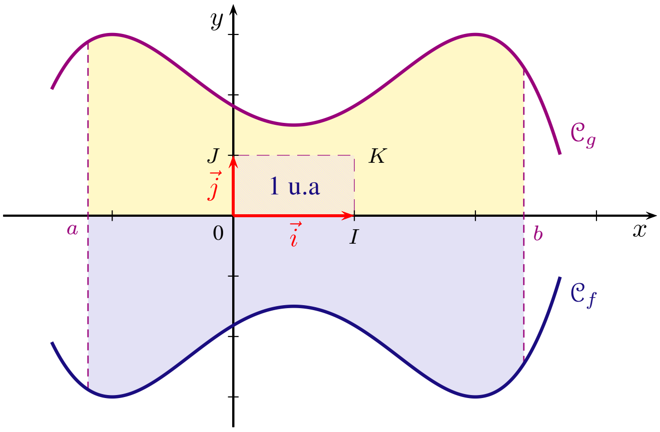
Les fonctions u et v ainsi définies sont dérivables et de dérivées continues sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$ (u et v sont « de classe C^1 sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$ ») donc en appliquant le théorème d'intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\ \mathrm{d}x &= \left[\ uv\ \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} uv' \\
&= \left[\ x\ln x\ \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\ x\ln x\ \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\ x\ln x\ \right]_1^{\mathrm{e}} - \left[\ x\ \right]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \mathrm{e}\ \ln\ \mathrm{e}\ - 1\ln 1 - (\mathrm{e}\ - 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

VI Calculer une aire à l'aide d'une intégrale

VI.1 Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a; b]$ par $g = -f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine $\mathcal{D}_g$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



VI.1.1 Définition

Définition 3

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathcal{A}$$

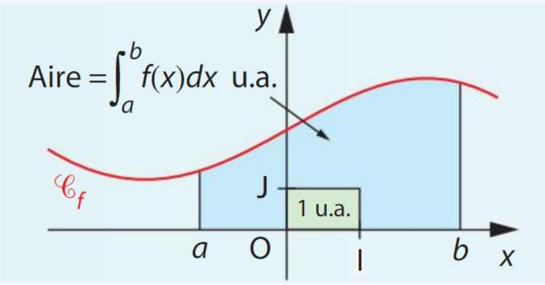
VI.2 Calculs d'aires : Bilan

Propriété 6 (Calcul d'aire)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b des réels de I tels que $a \leqslant b$.
Soit E la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

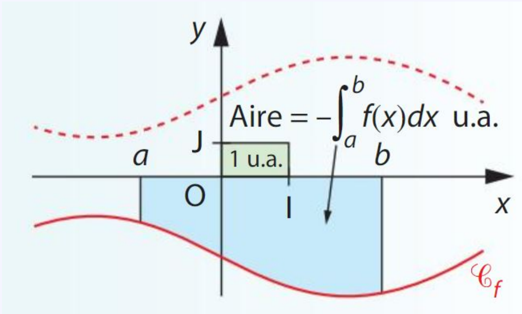
Si $f \geqslant 0$ (positive) sur I, l'aire de E, en unités d'aire :

$$\boxed{Aire(E) = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \quad \text{u.a.}}$$



Si $f \leqslant 0$ (négative) sur I, l'aire de E, en unités d'aire :

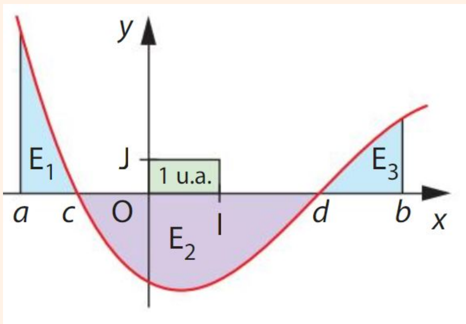
$$\boxed{Aire(E) = \left(-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \quad \text{u.a.}}$$



Remarque

Si la fonction f change de signe sur I, on utilise alors la relation de Chasles afin de partager E en différentes parties situées, soit en dessous, soit au dessus de l'axe des abscisses.
Par exemple on aurait ici :

$$Aire(E) = Aire(E_1) + Aire(E_2) + Aire(E_3)$$
$$Aire(E) = \left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \quad \text{u.a.}$$



On peut aussi en déduire que :

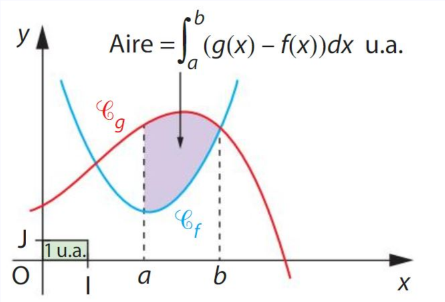
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = Aire(E_1) - Aire(E_2) + Aire(E_3)$$

VI.3 Calculs d'aires entre deux courbes

Théorème 10

Si f et g sont des fonctions continues et positives sur $[a\,;\,b]$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$



Exemple 5

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x$. Sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$ on a montré lors du chapitre précédent que $x - \ln x > 0$. L'aire $\mathcal{A}$ se la surface comprise entre les courbes représentatives de f et g et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$ est donc égale en unité d'aire à :

$$\mathcal{A} = \int_1^3 (x - \ln x)\,\mathrm{d}x$$

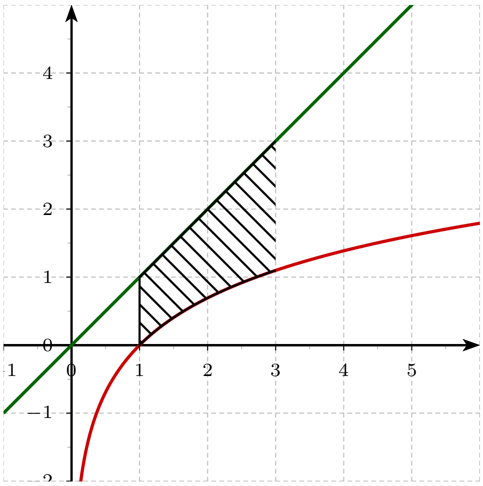
- une primitive de $x \longmapsto x$ est $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$;
- une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln x$ est $x \longmapsto x\ln x - x$ (voir exemple **??**)
- donc une primitive de f est la fonction :

$$F\ :\ x \longmapsto F(x) = \frac{x^2}{2} - (x\ln x - x) \quad \text{et on a} \quad \begin{cases} F(3) = \dfrac{9}{2} - (3\ln 3 - 3) = \dfrac{15}{2} - 3\ln 3 \\[2ex] F(1) = \dfrac{1}{2} - \left(\underbrace{1\ln 1}_{0} - 1\right) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

On a donc :

$$\int_1^3 (x - \ln x)\,\mathrm{d}x = \big[\ \ F(x)\ \ \big]_1^3 = F(3) - F(1)$$
$$= \frac{15}{2} - 3\ln 3 - \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \left(\int_1^3 (x - \ln x)\,\mathrm{d}x\right)\ \text{u.a.} = (6 - 3\ln 3)\ \text{u.a.}}$$



VII Valeur moyenne

Théorème 11

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$).
On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ le réel

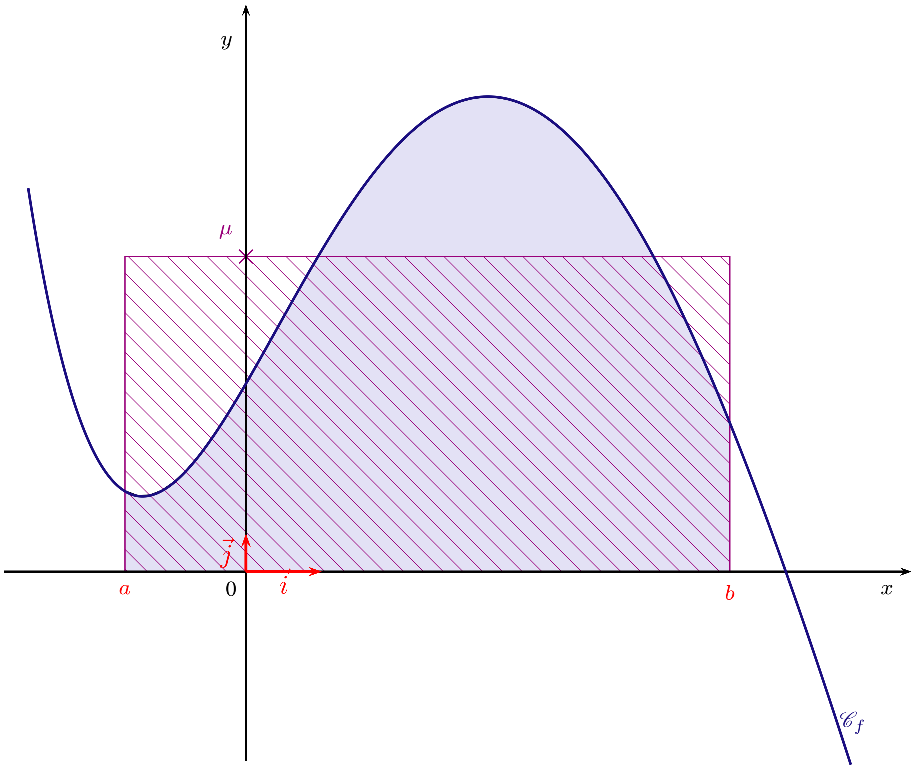
$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Cette valeur moyenne est un prolongement de la moyenne arithmétique dans le cas d'une fonction continue.

Interprétation graphique.

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b-a$



Fin du cours