



ROC

Les **ROC**, (**R**estitution **O**rganisée de **C**onnaissances), sont les démonstrations du cours à connaître indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale Spécialité entré en vigueur à la rentrée 2020. Ce chapitre ne compte pas de ROC.

I La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et strictement positive sur \mathbb{R} . D'après le théorème de la valeur intermédiaire, pour tout réel $k > 0$, l'équation $e^x = k$ admet donc une unique solution dans \mathbb{R} .

On définit une nouvelle fonction appelée logarithme népérien qui à tout réel k strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.

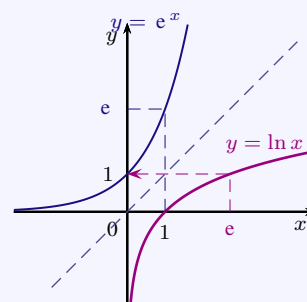
I.1 Définition

Propriété 1 (Logarithme (Admis))

Pour tout réel $k > 0$, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution α .
On note $\ln(k)$ et on lit **logarithme népérien** de k , la solution de cette équation.

On en déduit que : $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

$$\begin{cases} 0 \xrightarrow{\text{exp}} e^0 = 1 \\ 1 \xrightarrow{\text{ln}} \ln 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 \xrightarrow{\text{exp}} e^1 = e \\ e \xrightarrow{\text{ln}} \ln e = 1 \end{cases}$$



x	$-\infty$	$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$	$\alpha = \ln k$	$+\infty$
Variations de $x \mapsto e^x$		0	$e \approx 2.718$	k	$+\infty$

Définition 1 (La fonction logarithme népérien)

- La fonction logarithme népérien est la fonction qui, à tout réel strictement positif x , associe $\ln x$.
- On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

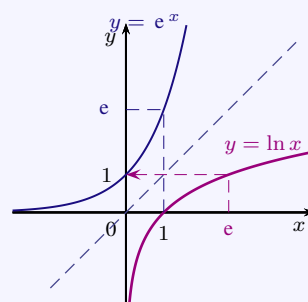
$$\ln : \begin{cases}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{cases} \quad \text{avec } e^{\ln x} = x$$

Propriété 2 (Courbes symétriques et fonction réciproque)

On dit que la fonction logarithme népérien est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont **symétriques par rapport à la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$** (la première bissectrice).

$$\begin{cases} 0 \xrightarrow{\text{exp}} e^0 = 1 \\ 1 \xrightarrow{\text{ln}} \ln 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 \xrightarrow{\text{exp}} e^1 = e \\ e \xrightarrow{\text{ln}} \ln e = 1 \end{cases}$$



I.2 Conséquences

Propriété 3

1. La fonction \ln est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

2. Pour tout réel x strictement positif :

$$e^{\ln x} = x$$

3. Pour tout réel x :

$$\ln(e^x) = x$$



Preuve

Les deux premières assertions résultent directement de la définition. Pour la troisième, on remarque que :

- Par définition, $\ln a$ est l'unique solution de l'équation $e^x = a$ donc avec $a = e^x$:
- $\ln e^x$ est l'unique solution de l'équation $e^x = e^x$ soit simplement x . Donc $\ln e^x = x$.

II Propriétés algébriques

II.1 Propriété fondamentale

Théorème 1

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$



Preuve



Remarque

- John Napier inventa en 1617 les logarithmes, du grec logos (rapport, raison) et arithmos (nombre), et une méthode de calcul transformant les multiplications en additions.
- La fonction exponentielle transforme une somme en produit, sa fonction réciproque, la fonction logarithme népérien transforme un produit en somme.

II.2 Autres règles de calcul

Théorème 2

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

1. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

3. $\ln(a^n) = n \ln a$

4. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$



Preuve

1. Soit $a > 0$ montrons que : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

$$\begin{cases} a > 0 \\ \frac{1}{a} > 0 \\ a \times \frac{1}{a} = \dots \end{cases} \quad \text{donc ...}$$

2. Soient $a > 0$ et $b > 0$ montrons que : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \dots$$

3. Soient $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ montrons que : $\ln(a^n) = n \ln a$.

$$\begin{cases} e^{\ln(a^n)} = \dots\dots\dots \\ e^{n \ln a} = (\dots\dots\dots)^n = \dots\dots\dots \end{cases}$$

Donc ...

4. Soit $a > 0$ montrons que : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$.

$a > 0$ alors $(\sqrt{a})^2 = \dots\dots\dots$ donc ...

III Étude de la fonction

Propriété 4

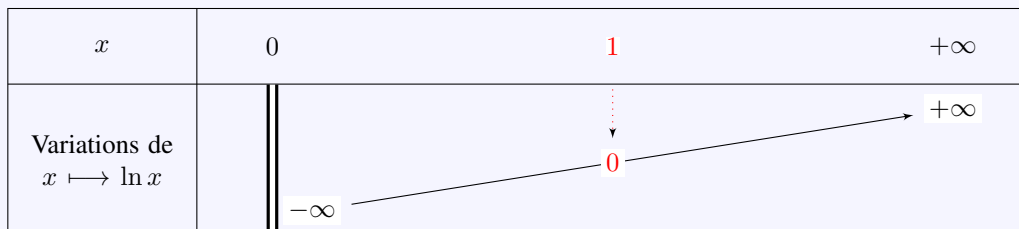
1. La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

2. La fonction \ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

3. On a :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty}$$



4. Pour a et b strictement positifs,

$$\begin{cases} a = b \iff \ln a = \ln b \\ a < b \iff \ln a < \ln b \end{cases}$$



Preuve

1. Dérivée.

On admet que la fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{\ln x}$. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \dots\dots\dots$$

Or pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = x \implies f'(x) = \dots\dots$$

Ainsi pour tout réel $x > 0$,

$\dots\dots$

2. Variations.

Puisque $x > 0$, la dérivée de la fonction \ln est strictement positive, donc la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3. Limites.

• En $+\infty$.

Soit A un réel et x un réel strictement positif. Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} on a :

$$\ln x > A \iff \dots\dots\dots$$

De ce fait, pour tout réel A , aussi grand soit-il,

il existe un réel $m = \dots\dots$ tel que pour tout réel $x > 0$ tels que $x > m = \dots\dots$, on a $\ln x > \dots\dots$.

Ce qui peut s'écrire :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad , \exists m = \dots\dots \quad , \forall x \in]0; +\infty[\quad , (x \geq m \implies \ln x \geq A)$$

Cela montre que la fonction logarithme tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

• En 0.

La variable x tend vers 0 avec $x > 0$. on pose :

$$X = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{X}$$

Donc si x tend vers 0^+ , alors X tend vers $+\infty$.

On en déduit par théorème de composition que :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \dots\dots \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = \dots\dots \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x} = \dots\dots$$

De ce fait, pour $x > 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x} = \dots\dots \\ \ln \frac{1}{x} = -\ln x \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \dots\dots$$

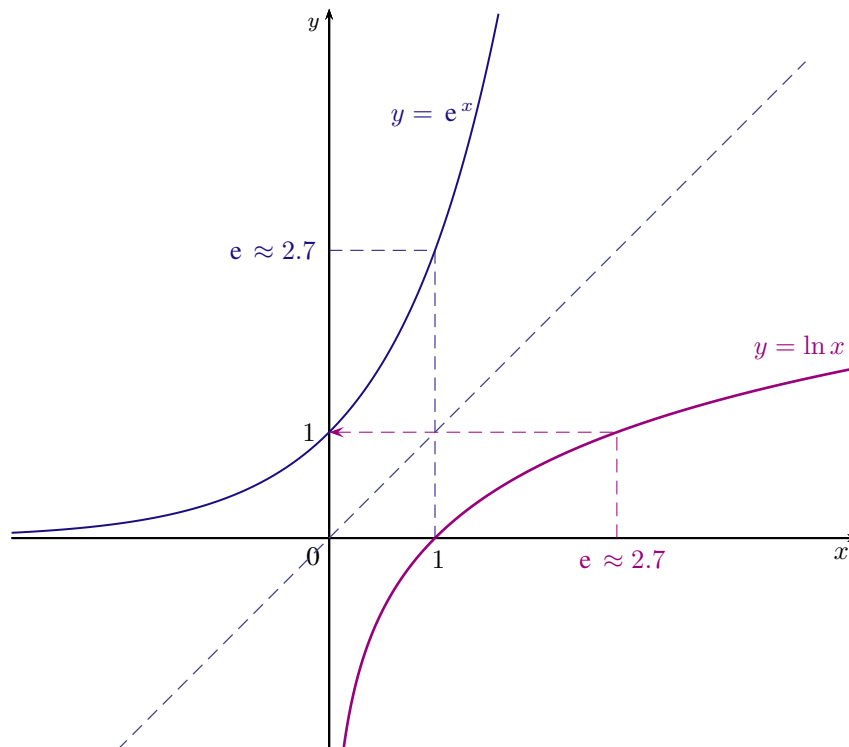
III.1 Conséquences

Théorème 3

Pour tout réel x strictement positif :

$$\begin{cases} \ln x = 0 \iff x = 1 \\ \ln x > 0 \iff x > 1 \end{cases} \implies \ln x < 0 \iff 0 < x < 1$$

La fonction logarithme est négative sur l'intervalle $]0; 1]$; positive sur l'intervalle $[1; +\infty[$; nulle en 1.



x	0	0.1	0.5	1	2	$e \approx 2.7$	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln x$	Indéfini	-2.3	-0.7	0.0	0.7	1.0	1.1	1.4	1.6	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3

III.2 Compléments sur les limites et sur les dérivées

Propriété 5 (Croissances comparées)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

On rappelle que :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$



Preuve

1. Limite en $+\infty$ de $\frac{\ln x}{x}$.

En posant $X = \ln x$ pour $x > 0$ on a $x = e^X$ et :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X} = X e^{-X}$$

Donc puisque $X = \ln x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ on a d'après les croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$$

2. Limite en 0^+ de $x \ln x$.

En posant $X = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ on a $x = \frac{1}{X}$ et :

$$x \ln x = \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = -\frac{\ln X}{X}$$

Donc puisque $X = \frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+ on en déduit par le théorème de composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-\ln X}{X} = 0$$

En conséquence :

Propriété 6 (Croissances comparées (cas général))

Pour tout nombre entier $n > 0$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

Propriété 7 (Avec le nombre dérivé en 1)

La fonction \ln est dérivable en 1, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = \ln'(1)$$



Preuve

On rappelle que si la fonction f est dérivable en a alors la limite suivante existe et :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Posons $f(x) = \ln x$. La fonction logarithme est dérivable en 1 donc la limite suivante existe.

Avec $x = h$ et $a = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} = f'(1)$$

Or on a :

$$\begin{cases} f(x) = \ln x \implies f(1) = \dots\dots \\ f'(x) = \dots\dots \implies f'(1) = \dots\dots \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Propriété 8 (Dérivée de $\ln u$ (Admis))

Soit u une fonction dérivable sur I et telle que $u > 0$ sur un intervalle I . Alors la fonction $g : x \mapsto \ln u(x)$ est dérivable sur I et

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

IV Équations et inéquations

Les fonctions \ln et exponentielle sont strictement croissantes, on peut donc (sous réserve d'existence) composer par \ln et \exp dans les inéquations (et équations). La propriété utilisée pour la résolution d'équations et d'inéquations est la suivante :

Théorème 4

Pour tout réel x strictement positif on a :

$$e^{\ln x} = x$$

Pour tout réel x on a :

$$\ln(e^x) = x$$

Ce que l'on écrit souvent de façon abusive, pour $TRUC > 0$:

$$e^{\ln TRUC} = TRUC \quad \text{et} \quad \ln(e^{TRUC}) = TRUC$$

IV.1 Inéquations et suites : Point BAC

Exemple 1 (Avec les suites)

On considère la suite (a_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}; a_n = 85 \times (0,2)^n + 15$$

Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels

$$a_n < 15,004$$

**Preuve****Remarque**

Astuce : Le piège dans ce genre de question est la division par $\ln q$ dans une inégalité. Il faut bien avoir en tête que :

- Si $q \in]0; 1[$ alors $\ln q < 0$. Il faudra donc changer le sens de l'inéquation si on divise chaque membre par $\ln q$.
- Si $q > 1$ alors $\ln q > 0$. Dans ce cas, l'ordre ne changera pas après division par $\ln q$.

IV.2 Inéquations et fonctions : Point BAC

L'application essentielle est l'étude de signe d'une fonction dérivée afin de dresser le tableau de variations sur un intervalle donné. La rédaction est toujours la même, il faut faire très attention au fait que les solutions des inéquations doivent appartenir à l'intervalle. On procède toujours ainsi

Méthode 1 (Signe de la dérivée)

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 8]$ par : $f(x) = \frac{8e^{-x}}{(20e^{-x} + 1)^2}$.

Un logiciel donne la dérivée de f sur $[0 ; 8]$: $f'(x) = 8e^{-x} \times \frac{20e^{-x} - 1}{(20e^{-x} + 1)^3}$.

Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations sur $[0 ; 8]$.

1. On exhibe les termes strictement positifs.

La fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} de ce fait :

$$\forall x \in [0 ; 8] ; e^{-x} > 0 \implies \begin{cases} 8e^{-x} > 0 \\ (20e^{-x} + 1)^3 > 0 \end{cases}$$

2. Étude du signe de la dérivée.

La dérivée est donc du signe $20e^{-x} - 1$. On peut faire une étude générale du signe de l'expression sur \mathbb{R} puis se ramener à celle de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

- On a pour tout réel x :

$$20e^{-x} - 1 = 0 \iff e^{-x} = \frac{1}{20}$$

En composant par la fonction \ln définie sur $]0 ; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} 20e^{-x} - 1 = 0 &\iff -x = \ln \frac{1}{20} = -\ln 20 \\ &\iff x = \ln 20 \approx 3 \in [0 ; 8] \end{aligned}$$

soit sur $[0 ; 8]$:

$$\forall x \in [0 ; 8] ; \boxed{f'(x) = 0 \iff x = \ln 20}$$

- En outre pour tout réel x :

$$20e^{-x} - 1 < 0 \iff e^{-x} < \frac{1}{20}$$

En composant par la fonction \ln strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} 20e^{-x} - 1 < 0 &\iff -x < \ln \frac{1}{20} = -\ln 20 \\ &\iff x > \ln 20 \approx 3 \end{aligned}$$

soit sur $[0 ; 8]$:

$$\forall x \in [0 ; 8] ; \boxed{f'(x) < 0 \iff \ln 20 < x < 8}$$

En conséquence sur l'intervalle $[0 ; 8]$:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) < 0 &\iff \ln 20 < x < 8 \\ f'(x) = 0 &\iff x = \ln 20 \end{aligned} \right\} \implies f'(x) > 0 \iff 0 < x < \ln 20$$

3. On dresse alors le tableau de variations de f .

x	0	$\ln 20$	8
$f'(x)$		+	0 -
f	$\frac{8}{21^2}$	$f(\ln 20)$	$f(8)$

V Compléments (Non Exigible)

V.1 Fonctions puissances

Définition 2 (Fonctions puissances)

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note φ_a la fonction définie par :

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto \varphi_a(x) = x^a = e^{a \ln x} \end{cases}$$

2. Les fonctions φ_a sont appelées **fonctions puissances**.

Propriété 9

La fonction φ_a est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_a'(x) = ax^{a-1}$$



Exercice 1

Étudier les variations et les limites (en 0 et $+\infty$) de f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = x^x \end{cases}$$

V.2 Logarithmes de base quelconque

Définition 3 (Logarithmes de base quelconque)

1. Soit a un réel strictement positif et différent de 1, on appelle **logarithme de base a**, la fonction, notée \log_a , définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\log_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \end{cases}$$

2. Si $a = e$, on retrouve le **logarithme népérien**.
3. Si $a = 10$, on obtient le **logarithme décimal** que l'on note aussi **log**. C'est le logarithme utilisé en physique (décibels) et en chimie (pH).

Propriété 10

Soit p en entier. Le logarithme décimal de 10^p est égal à p soit :

$$\log 10^p = p$$



Exercice 2

Soit n un entier naturel strictement positif.

Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire n en base 10 est égal à la partie entière de $(1 + \log n)$.

↩ **Fin du cours** ↪