



### ROC

Les **ROC**, (**R**estitution **O**rganisée de **C**onnaissances), sont les démonstrations du cours à connaître indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale Spécialité entré en vigueur à la rentrée 2020. Ce chapitre ne compte pas de ROC.

## I La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et strictement positive sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de la valeur intermédiaire, pour tout réel  $k > 0$ , l'équation  $e^x = k$  admet donc une unique solution dans  $\mathbb{R}$ .

On définit une nouvelle fonction appelée logarithme népérien qui à tout réel  $k$  strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.

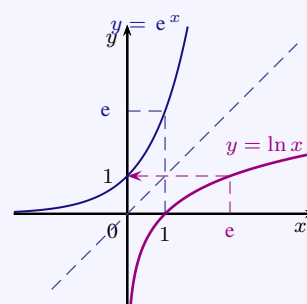
### I.1 Définition

#### Propriété 1 (Logarithme (Admis))

Pour tout réel  $k > 0$ , l'équation  $e^x = k$  admet une unique solution  $\alpha$ .  
On note  $\ln(k)$  et on lit **logarithme népérien** de  $k$ , la solution de cette équation.

On en déduit que :  $\ln 1 = 0$  et  $\ln e = 1$

$$\begin{cases} 0 \xrightarrow{\text{exp}} e^0 = 1 \\ 1 \xrightarrow{\text{ln}} \ln 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 \xrightarrow{\text{exp}} e^1 = e \\ e \xrightarrow{\text{ln}} \ln e = 1 \end{cases}$$



$x$	$-\infty$	$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$	$\alpha = \ln k$	$+\infty$
Variations de $x \mapsto e^x$		0	$e \approx 2.718$	$k$	$+\infty$

#### Définition 1 (La fonction logarithme népérien)

- La fonction logarithme népérien est la fonction qui, à tout réel strictement positif  $x$ , associe  $\ln x$ .
- On note  $\ln x$ , au lieu de  $\ln(x)$ , le logarithme népérien de  $x$ , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

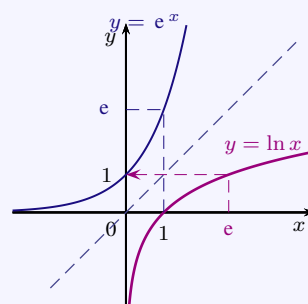
$$\ln : \begin{cases} ]0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{cases} \quad \text{avec } e^{\ln x} = x$$

#### Propriété 2 (Courbes symétriques et fonction réciproque)

On dit que la fonction logarithme népérien est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle.

Dans un repère orthonormé, leurs courbes représentatives sont **symétriques par rapport à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$**  (la première bissectrice).

$$\begin{cases} 0 \xrightarrow{\text{exp}} e^0 = 1 \\ 1 \xrightarrow{\text{ln}} \ln 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1 \xrightarrow{\text{exp}} e^1 = e \\ e \xrightarrow{\text{ln}} \ln e = 1 \end{cases}$$



## I.2 Conséquences

### Propriété 3

1. La fonction  $\ln$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ .

2. Pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$e^{\ln x} = x$$

3. Pour tout réel  $x$  :

$$\ln(e^x) = x$$



### Preuve

Les deux premières assertions résultent directement de la définition. Pour la troisième, on remarque que :

- Par définition,  $\ln a$  est l'unique solution de l'équation  $e^x = a$  donc avec  $a = e^x$  :
- $\ln e^x$  est l'unique solution de l'équation  $e^x = e^x$  soit simplement  $x$ . Donc  $\ln e^x = x$ .

## II Propriétés algébriques

### II.1 Propriété fondamentale

#### Théorème 1

Pour tous réels  $a$  et  $b$  strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$



### Preuve

Soient  $a > 0$  et  $b > 0$  deux réels strictement positifs, par définition de la fonction logarithme,  $\ln k$  est l'unique solution de l'équation  $e^x = k$  donc  $e^{\ln k} = k$  ce qui nous donne :

- Pour  $k = a$ , l'égalité :  $a = e^{\ln a}$  ;
- Pour  $k = b$ , l'égalité :  $b = e^{\ln b}$  ;
- Pour  $k = ab$ , l'égalité :  $ab = e^{\ln ab}$  ;

D'autre part :

$$a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$$

D'où puisque par définition  $e^{\ln(a \times b)} = a \times b$  :

$$e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln a + \ln b}$$

Donc

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$



### Remarque

- John Napier inventa en 1617 les logarithmes, du grec logos (rapport, raison) et arithmos (nombre), et une méthode de calcul transformant les multiplications en additions.
- La fonction exponentielle transforme une somme en produit, sa fonction réciproque, la fonction logarithme népérien transforme un produit en somme.

## II.2 Autres règles de calcul

**Théorème 2**

Pour tous réels  $a$  et  $b$  strictement positifs et  $n$  entier relatif :

$$\begin{array}{l|l} 1. \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a & 3. \ln(a^n) = n \ln a \\ 2. \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b & 4. \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a \end{array}$$

**Preuve**

1. Soit  $a > 0$  alors  $\frac{1}{a} > 0$ . Or  $a \times \frac{1}{a} = 1$  donc

$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 \iff \ln a + \ln \frac{1}{a} = 0 \iff \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

2. Soient  $a > 0$  et  $b > 0$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

3. Soient  $a > 0$  un réel strictement positif et  $n$  un entier relatif,

$$e^{\ln(a^n)} = a^n \text{ et } e^{n \ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$$

Donc  $e^{\ln(a^n)} = e^{n \ln a}$  et par conséquent,  $\ln(a^n) = n \ln a$ .

4. Soit  $a > 0$  alors  $(\sqrt{a})^2 = a$  donc

$$\ln a = \ln(\sqrt{a})^2 = 2 \ln \sqrt{a}$$

### III Étude de la fonction

**Propriété 4**

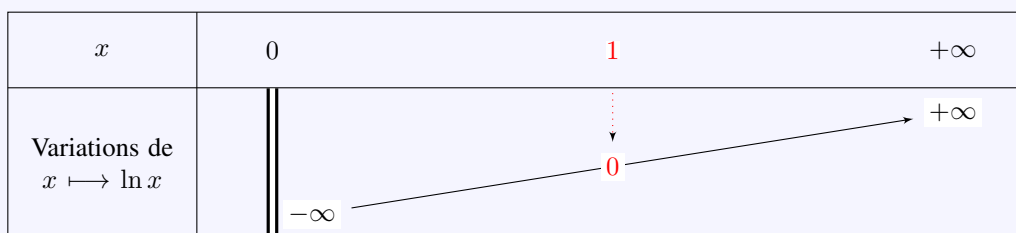
1. La fonction logarithme népérien est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et pour tout réel  $x > 0$  :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

2. La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

3. On a :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty}$$



4. Pour  $a$  et  $b$  strictement positifs,

$$\begin{cases} a = b \iff \ln a = \ln b \\ a < b \iff \ln a < \ln b \end{cases}$$



**Preuve**

**1. Dérivée.**

On admet que la fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = e^{\ln x}$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et pour tout réel  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x} = \ln'(x) \times x$$

Or pour tout réel  $x > 0$ ,

$$f(x) = x \implies f'(x) = 1$$

Ainsi pour tout réel  $x > 0$ ,

$$\ln'(x) \times x = 1 \implies \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

**2. Variations.**

Puisque  $x > 0$ , la dérivée de la fonction  $\ln$  est strictement positive, donc la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

**3. Limites.**

• En  $+\infty$ .

Soit  $A$  un réel et  $x$  un réel strictement positif. Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  on a :

$$\ln x > A \iff e^{\ln x} = x > e^A$$

De ce fait, pour tout réel  $A$ , aussi grand soit-il,

il existe un réel  $m = e^A$  tel que pour tout réel  $x > 0$  tels que  $x > m = e^A$ , on a  $\ln x > A$ .

Ce qui peut s'écrire :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad , \exists m = e^A \quad , \forall x \in ]0; +\infty[ \quad , (x \geq m \implies \ln x \geq A)$$

Cela montre que la fonction logarithme tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .

• En 0.

La variable  $x$  tend vers 0 avec  $x > 0$ . on pose :

$$X = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{X}$$

Donc si  $x$  tend vers  $0^+$ , alors  $X$  tend vers  $+\infty$ .

On en déduit par théorème de composition que :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x} = +\infty$$

De ce fait, pour  $x > 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x} = +\infty \\ \ln \frac{1}{x} = -\ln x \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

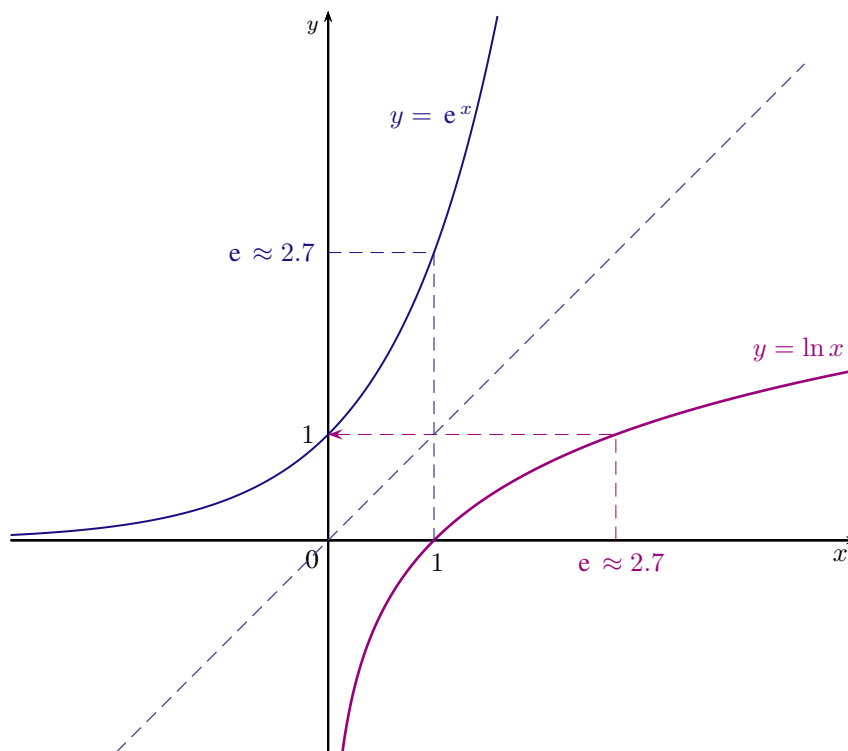
### III.1 Conséquences

#### Théorème 3

Pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$\begin{cases} \ln x = 0 \iff x = 1 \\ \ln x > 0 \iff x > 1 \end{cases} \implies \ln x < 0 \iff 0 < x < 1$$

La fonction logarithme est négative sur l'intervalle  $]0; 1]$ ; positive sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ ; nulle en 1.



$x$	0	0.1	0.5	1	2	$e \approx 2.7$	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln x$	Indéfini	-2.3	-0.7	0.0	0.7	1.0	1.1	1.4	1.6	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3

## III.2 Compléments sur les limites et sur les dérivées

**Propriété 5** (Croissances comparées)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

On rappelle que :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

**Preuve****1. Limite en  $+\infty$  de  $\frac{\ln x}{x}$ .**

En posant  $X = \ln x$  pour  $x > 0$  on a  $x = e^X$  et :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X} = X e^{-X}$$

Donc puisque  $X = \ln x$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  on a d'après les croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$$

**2. Limite en  $0^+$  de  $x \ln x$ .**

En posant  $X = \frac{1}{x}$  pour  $x > 0$  on a  $x = \frac{1}{X}$  et :

$$x \ln x = \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = -\frac{\ln X}{X}$$

Donc puisque  $X = \frac{1}{x}$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $0^+$  on en déduit par le théorème de composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-\ln X}{X} = 0$$

**Propriété 6** (Avec le nombre dérivé en 1)

La fonction  $\ln$  est dérivable en 1, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = \ln'(1)$$

**Preuve**

On rappelle que si la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  alors la limite suivante existe et :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Or la fonction logarithme est dérivable en 1 donc la limite suivante existe et (avec  $x = h$ ) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(1)}{x} = \ln'(1)$$

Ce qui nous donne puisque  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$  et  $\ln 1 = 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

#### Propriété 7 (Dérivée de $\ln u$ (Admis))

Soit  $u$  une fonction dérivable sur  $I$  et telle que  $u > 0$  sur un intervalle  $I$ . Alors la fonction  $g : x \mapsto \ln u(x)$  est dérivable sur  $I$  et

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

## IV Équations et inéquations

Les fonctions  $\ln$  et exponentielle sont strictement croissantes, on peut donc (sous réserve d'existence) composer par  $\ln$  et  $\exp$  dans les inéquations (et équations). La propriété utilisée pour la résolution d'équations et d'inéquations est la suivante :

#### Théorème 4

Pour tout réel  $x$  strictement positif on a :

$$e^{\ln x} = x$$

Pour tout réel  $x$  on a :

$$\ln(e^x) = x$$

Ce que l'on écrit souvent de façon abusive, pour  $TRUC > 0$  :

$$e^{\ln TRUC} = TRUC \quad \text{et} \quad \ln(e^{TRUC}) = TRUC$$

### IV.1 Inéquations et suites : Point BAC

#### Exemple 1 (Avec les suites)

On considère la suite  $(a_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}; a_n = 85 \times (0,2)^n + 15$$

Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels

$$a_n < 15,004$$



#### Preuve

On a pour tout entier  $n$  :

$$\begin{aligned} a_n < 15,004 &\iff 85 \times 0,2^n + 15 < 15,004 \\ &\iff 85 \times 0,2^n < 0,004 \\ &\iff 0,2^n < \frac{0,004}{85} \end{aligned}$$

On compose dans les deux membres par la fonction  $\ln$  strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  soit :

$$\begin{aligned} a_n < 15,004 &\iff \ln 0,2^n < \ln \frac{0,004}{85} \\ &\iff n \ln 0,2 < \ln \frac{0,004}{85} \end{aligned}$$

On divise les deux membres par  $\ln 0,2 < 0$ , l'ordre change :

$$a_n < 15,004 \iff n > \frac{\ln \frac{0,004}{85}}{\ln 0,2} \approx 6,2$$

Donc puisque  $n$  est un entier positif, les solutions de l'inéquation sont les entiers supérieurs ou égaux à 7.

$$\boxed{a_n < 15,004 \iff n \geq 7}$$



### Remarque

Astuce : Le piège dans ce genre de question est la division par  $\ln q$  dans une inégalité. Il faut bien avoir en tête que :

- Si  $q \in ]0; 1[$  alors  $\ln q < 0$ . Il faudra donc changer le sens de l'inéquation si on divise chaque membre par  $\ln q$ .
- SI  $q > 1$  alors  $\ln q > 0$ . Dans ce cas, l'ordre ne changera pas après division par  $\ln q$

### IV.2 Inéquations et fonctions : Point BAC

L'application essentielle est l'étude de signe d'une fonction dérivée afin de dresser le tableau de variations sur un intervalle donné. La rédaction est toujours la même, il faut faire très attention au fait que les solutions des inéquations doivent appartenir à l'intervalle. On procède toujours ainsi

**Méthode 1** (Signe de la dérivée)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 8]$  par :  $f(x) = \frac{8e^{-x}}{(20e^{-x} + 1)^2}$ .

Un logiciel donne la dérivée de  $f$  sur  $[0; 8]$  :  $f'(x) = 8e^{-x} \times \frac{20e^{-x} - 1}{(20e^{-x} + 1)^3}$ .

Étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variations sur  $[0; 8]$ .

1. On exhibe les termes strictement positifs.

La fonction exponentielle est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  de ce fait :

$$\forall x \in [0; 8]; e^{-x} > 0 \implies \begin{cases} 8e^{-x} > 0 \\ (20e^{-x} + 1)^3 > 0 \end{cases}$$

2. Étude du signe de la dérivée.

La dérivée est donc du signe  $20e^{-x} - 1$  soit

- On a pour tout réel  $x \in [0; 8]$  :

$$f'(x) = 0 \iff 20e^{-x} - 1 = 0$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{-x} = \frac{1}{20}$$

En composant par la fonction  $\ln$  définie sur  $]0; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = 0 \iff -x = \ln \frac{1}{20} = -\ln 20$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \ln 20 \approx 3 \in [0; 8]$$

soit

$$\forall x \in [0; 8]; \boxed{f'(x) = 0 \iff x = \ln 20}$$

- En outre pour tout réel  $x \in [0; 8]$  :

$$f'(x) < 0 \iff 20e^{-x} - 1 < 0$$

$$f'(x) < 0 \iff e^{-x} < \frac{1}{20}$$

En composant par la fonction  $\ln$  strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) < 0 \iff -x < \ln \frac{1}{20} = -\ln 20$$

$$f'(x) < 0 \iff \begin{cases} x > \ln 20 \approx 3 \\ \text{et } x \in [0; 8] \end{cases}$$

soit

$$\forall x \in [0; 8]; \boxed{f'(x) < 0 \iff \ln 20 < x < 8}$$

En conséquence sur l'intervalle  $[0; 8]$  :

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \iff \ln 20 < x < 8 \\ f'(x) = 0 \iff x = \ln 20 \end{array} \right\} \implies f'(x) > 0 \iff 0 < x < \ln 20$$

3. On dresse alors le tableau de variations de  $f$ .

$x$	0	$\ln 20$	8
$f'(x)$		+	0 -
$f$	$\frac{8}{21^2}$	$f(\ln 20)$	$f(8)$

## V Compléments (Non Exigible)

### V.1 Fonctions puissances

#### Définition 2 (Fonctions puissances)

1. Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $\varphi_a$  la fonction définie par :

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto \varphi_a(x) = x^a = e^{a \ln x} \end{cases}$$

2. Les fonctions  $\varphi_a$  sont appelées **fonctions puissances**.

#### Propriété 8

La fonction  $\varphi_a$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi_a'(x) = ax^{a-1}$$



#### Exercice 1

Étudier les variations et les limites (en 0 et  $+\infty$ ) de  $f$  définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = x^x \end{cases}$$

### V.2 Logarithmes de base quelconque

#### Définition 3 (Logarithmes de base quelconque)

1. Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1, on appelle **logarithme de base a**, la fonction, notée  $\log_a$ , définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\log_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \end{cases}$$

2. Si  $a = e$ , on retrouve le **logarithme népérien**.
3. Si  $a = 10$ , on obtient le **logarithme décimal** que l'on note aussi **log**.  
C'est le logarithme utilisé en physique (décibels) et en chimie (pH).

#### Propriété 9

Soit  $p$  en entier. Le logarithme décimal de  $10^p$  est égal à  $p$  soit :

$$\log 10^p = p$$



**Preuve**

Soit  $p$  en entier. Le logarithme décimal de  $10^p$  est égal à :

$$\log 10^p = \frac{\ln 10^p}{\ln 10} = \frac{p \ln 10}{\ln 10} = p$$



**Exercice 2**

Soit  $n$  un entier naturel strictement positif.

Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire  $n$  en base 10 est égal à la partie entière de  $(1 + \log n)$ .



**Preuve**

Supposons que l'entier  $n$  s'écrive avec  $(p + 1)$  chiffres en base 10.

$$n = a_p \cdots a_2 a_1 a_0 = \sum_{k=0}^p a_k \times 10^k$$

Avec  $a_p \in \llbracket 1 ; 9 \rrbracket$  et  $a_k \in \llbracket 0 ; 9 \rrbracket$  pour  $k \in \llbracket 0 ; p - 1 \rrbracket$ .

Cela peut sembler assez évident, si l'entier  $n$  s'écrit avec  $(p + 1)$  chiffres en base 10 (voir preuve ci-dessous) on a :

$$10^p \leq n < 10^{p+1}$$

La stricte croissance de la fonction  $\log$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  nous donne alors :

$$10^p \leq n < 10^{p+1} \implies \log 10^p \leq \log n < \log 10^{p+1}$$

Soit d'après la propriété 9 :

$$p \leq \log n < p + 1$$

Et donc par définition de la partie entière :

$$p = \lfloor \log n \rfloor \quad \text{ou} \quad \boxed{p + 1 = \lfloor \log n + 1 \rfloor}$$

Conclusion : le nombre de chiffres nécessaires pour écrire  $n$  en base 10 est égal à la partie entière de  $(1 + \log n)$ .

**Preuve que  $10^p \leq n < 10^{p+1}$  :**

Puisque :  $a_p \in \llbracket 1 ; 9 \rrbracket$  et  $n = a_p \cdots a_2 a_1 a_0 = \sum_{k=0}^p a_k \times 10^k$  on a :

$$10^p \leq a_p 10^p \leq n \leq \sum_{k=0}^p 9 \times 10^k = 9 \times \frac{1 - 10^{p+1}}{1 - 10} = 10^{p+1} - 1 < 10^{p+1}$$

↩ **Fin du cours** ↪