Math93.com

Primitives et équations différentielles

Terminale Spécialité

ROC
Les **ROC, (Restitutions Organisées de Connaissances)**, sont les démonstrations du cours à connaître. Elle sont indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale Spécialité Mathématiques entré en vigueur à la rentrée 2020.
Ce chapitre compte **2 ROC** sur les 19 du programme de terminale. (Tous les ROC sur : www.math93.com).

I Primitives d'une fonction

I.1 Équation différentielle $y' = f$

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction g est une solution de l'**équation différentielle $y' = f$** sur I si et seulement si g est dérivable sur I et pour tout réel x de I on a :

$$g'(x) = f(x)$$

Exemple

Soit l'équation différentielle $y' = 2x$, pour tout éléments x de $\mathbb{R}$.
La fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x :

$$g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g'(x) = 2x$$

Donc g est UNE solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.
Une autre solution de cette équation différentielle est par exemple la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^2 + 5 \text{ car on a aussi } h'(x) = 2x.$$

Exercice 1

1. Soit l'équation différentielle $y' = x^3$, pour tout éléments x de $\mathbb{R}$.

   La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = \cdots\cdots\cdots$$
   est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = x^3$ pour tout réel x.

   Donc g est UNE solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

   Une autre solution de cette équation différentielle est par exemple la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$h(x) = \cdots\cdots\cdots$$

2. Soit l'équation différentielle $y' = x^2 + x + 1$, pour tout éléments x de $\mathbb{R}$.

   La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = \cdots\cdots\cdots$$
   est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = x^2 + x + 1$ pour tout réel x.

   Donc g est UNE solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

   Une autre solution de cette équation différentielle est par exemple la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$h(x) = \cdots\cdots\cdots$$

3. Soit l'équation différentielle $y' = x\,\mathrm{e}^{x^2}$, pour tout éléments x de $\mathbb{R}$.
   La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = \cdots\cdots\cdots$$
   est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$ pour tout réel x.
   Donc g est UNE solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.
   Une autre solution de cette équation différentielle est par exemple la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$h(x) = \cdots\cdots\cdots$$

Définition 2 (Équation différentielle du premier ordre)

Une **équation différentielle du premier ordre** est une équation dans laquelle interviennent une fonction dérivable f, sa dérivée f' et la variable x.
Attention, **l'inconnue** de cette équation est **la fonction f** elle-même (et pas x).

Exemple

$y' = x^3 + 1$ ou $xy' + 2y = \mathrm{e}^{x}$ ou $2y' - y = 1$.

Exercice 2

1. Soit (E_1) l'équation différentielle $y' = 4x - 3$, pour x réel.
   Déterminer UNE solution de (E_1) puis une autre solution de (E_1) qui s'annule en 0.
2. Soit (E_2) l'équation différentielle $y' - 2y = 4$, pour x réel.
   Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2$ est UNE solution de (E_2).
3. Soit (E_3) l'équation différentielle $xy' + y = 6x + 1$, pour x réel.
   Déterminer les réels a et b de façon que la fonction $h\ :\ x \longmapsto ax + b$ soit UNE solution de (E_3).

I.2 Primitives d'une fonction

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction F est UNE primitive de la fonction f sur I si, pour tout réel x de I on a :
$$F'(x) = f(x)$$

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. Alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$ est UNE primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F' = f$.
Mais la fonction $x \longmapsto x^2 + 5$ est une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$, ou $x \longmapsto x^2 - 7$ ou plus généralement $x \longmapsto x^2 + k$ (avec $k \in \mathbb{R}$).

Exercice 3

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \cdots\cdots\cdots$ est UNE primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F' = f$.

   Mais la fonction $x \longmapsto \cdots\cdots\cdots$ est une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$ ou plus généralement $x \longmapsto \cdots\cdots\cdots$ (avec $k \in \mathbb{R}$).

2. Soit g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Alors la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \cdots\cdots\cdots$ est UNE primitive de g sur $\mathbb{R}$ car $G' = g$.

   Mais la fonction $x \longmapsto \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ est une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$ ou plus généralement $x \longmapsto \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (avec $k \in \mathbb{R}$).

Propriété 1 (ROC)

1. **(Admis)** Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.
2. **(ROC)** Soit f une fonction continue sur I. Deux primitives de f sur I ne diffèrent que d'une constante.

ROC 1 : Exigible

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I.

- Alors pour tout réel x de I on a : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.
- On en déduit que tout réel x de I on a :

$$F'(x) = G'(x) \iff F'(x) - G'(x) = 0 \iff (F - G)' = 0 \text{ sur } I$$

- La fonction $x \longmapsto F(x) - G(x)$ a une dérivée nulle sur I, elle y est donc constante.
- Nommons k cette constante réelle. On a alors pour tout réel x de I :

$$\boxed{F(x) - G(x) = k} \iff \boxed{F(x) = G(x) + k}$$

Propriété 2

Soit f une fonction admettant F comme primitive sur I.
Alors la fonction $x \longmapsto F(x) + k$ est une autre primitive de f sur I et toutes les primitives de f sur I sont de cette forme.

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. Alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$ est UNE primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F' = f$.
TOUTES les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \longmapsto x^2 + k$ (avec k réel).

Exercice 4

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ est UNE primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F' = f$.

   TOUTES les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \longmapsto \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (avec k réel).

2. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$. Alors la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
   est UNE primitive de g sur $\mathbb{R}$ car $G' = g$.
   TOUTES les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \longmapsto \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (avec k réel).
3. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^4$. Alors la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
   est UNE primitive de h sur $\mathbb{R}$ car $H' = h$.
   TOUTES les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \longmapsto \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (avec k réel).
4. Soit k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$. Alors la fonction K définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
   est UNE primitive de k sur $\mathbb{R}$ car $K' = k$.
   TOUTES les primitives de k sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \longmapsto \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (avec k réel).
5. Soit l définie sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Alors la fonction L définie sur $\mathbb{R}$ par $L(x) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
   est UNE primitive de l sur $\mathbb{R}$ car $L' = l$.
   TOUTES les primitives de l sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \longmapsto \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (avec k réel).

II Recherche des primitives d'une fonction

II.1 Primitives des fonctions usuelles

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par ...	Validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{1}{2}x^2$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ n entier différent de (-1) et 0	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$ si $n > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -2$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	sur $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	sur $]-\infty\,;\,0[$ ou sur $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$ (un classique à connaître)	$F(x) = x\ln x - x$	sur $\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	sur $\mathbb{R}$

Méthode

En pratique il suffit de bien connaître les dérivées des fonctions usuelles.
On ajuste ensuite les coefficient multiplicateurs avec la formule

$$(ku)' = ku', \quad \text{où } u \text{ dérivable et } k \text{ réel}$$

Par exemple si $f(x) = 7x^3$ sur $\mathbb{R}$, on a une primitive $F(x) = 7 \times \dfrac{x^4}{4}$.

Soit u une fonction dérivable sur I.

f de la forme ...	Une primitive F est donnée par ...	Validité
$u'\,\mathrm{e}^{u}$	e^{u}	
$u'\,u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	u ne s'annulant pas sur I si $n<0$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x)\neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x)>0$ sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x)>0$ sur I

II.2 Linéarité

Théorème 1

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et α un réel, alors αF est une primitive de αf sur I.

Preuve

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F+G$ et αF sont dérivables sur I.

- $(F+G)'=F'+G'=f+g$ donc $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- $(\alpha F)'=\alpha F'=\alpha f$ donc αF est une primitive de αf sur I.

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $I=]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-\dfrac{3}{x}$.

- La fonction u définie par $u(x)=x^2$ admet comme primitive la fonction U définie par $U(x)=\dfrac{x^3}{3}$ car :
$$U'(x)=x^2=u(x)$$
- Sur l'intervalle $I=]0;+\infty[$ la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ admet pour primitive la fonction $x\mapsto\ln x$ car sur I :
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$
- Donc sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction v définie par $v(x)=-\dfrac{3}{x}$ admet comme primitive la fonction V définie par $V(x)=-3\ln x$.
- Donc la fonction $f=u+v$ admet comme primitive la fonction $F=U+V$ définie par
$$F(x)=\frac{x^3}{3}-3\ln x$$

Point Bac

Les exercices du bac ne proposent pas toujours de calculer une primitive. Il suffit souvent de montrer qu'une fonction donnée F est la primitive d'une autre f. La méthode dans ce cas est de dériver F et de montrer que l'on retrouve f.

Exemple 2 (Comme au Bac (à connaître))

On considère la fonction définie sur $I =]0\,;\,+\infty]$ par : $f(x) = \ln x$. Montrer que la fonction F définie ci-dessous est une primitive de f sur I : $F(x) = x\ln x - x$.

La fonction F est définie et dérivable sur I. Elle est de la forme $uv - w$ donc de dérivée $u'v + uv' - w'$ avec pour tout réel x de I :

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = \ln x$	$v'(x) = \dfrac{1}{x}$
$w(x) = x$	$w'(x) = 1$

Pour tout réel x de I :

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1$$
$$F'(x) = \ln x = f(x)$$

La dérivée de F sur I est donc f ce qui prouve que la fonction F est une primitive de f sur I.

Remarque

Il existe des fonctions continues dont on ne connait pas de forme explicite de primitive. Par exemple la fonction

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$$

est continue donc admet des primitives mais on ne sait pas les exprimer sous forme explicite.

III Équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + f$

III.1 Équations différentielles $y' = ay$

Propriété 3 (ROC $y' = ay$)

Soit a un réel.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions, où C est une constante réelle :

$$x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{ax}$$

ROC 2 : Exigible

- **Sens direct : montrons que $x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.**
  - Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}$, où C est un réel.
    On a pour tout réel x :
    $$f'(x) = C \times a\,\mathrm{e}^{ax} \iff f'(x) = a \times \underbrace{C\,\mathrm{e}^{ax}}_{f(x)} \iff f'(x) = a\,f(x)$$
  - De ce fait f est UNE solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
- **Réciproquement : montrons que si une fonction est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, alors elle est de la forme $x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{ax}$.**
  - Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-ax} \times f(x)$.
  - La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
    $$g'(x) = -a \times \mathrm{e}^{-ax} \times f(x) + \mathrm{e}^{-ax} \times f'(x)$$
  - Or f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ donc $f' = af$ soit en remplaçant dans l'égalité précédente :
    $$\begin{cases} g'(x) = -a\,\mathrm{e}^{-ax} f(x) + \mathrm{e}^{-ax} f'(x) \\ f' = af \end{cases} \Longrightarrow g'(x) = -a\,\mathrm{e}^{-ax} f(x) + a\,\mathrm{e}^{-ax} f(x) = 0$$
  - La fonction g est donc constante. Pour tout réel x on a :
    $$g(x) = \mathrm{e}^{-ax} \times f(x) = C \iff \boxed{f(x) = \frac{C}{\mathrm{e}^{-ax}} = C\,\mathrm{e}^{ax}}$$

Exemple

- Soit l'équation différentielle $y' = 2y$, pour x réel.
  L'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions de la forme :
  $$x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{2x} \quad , \quad C \in R$$

III.2 Équations différentielles $y' = ay + b$

Propriété 4 ($y' = ay + b$)

Soit a et b des réels avec a non nul.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions, où C est une constante réelle :

$$x \longmapsto f(x) + f_0(x) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f \text{ solution générale de } y' = ay \\ f_0 = -\dfrac{b}{a} \text{ la solution particulière constante de } (E) \end{cases}$$

Remarque

(E) l'équation différentielle $y' = ay + b$ a toujours une solution particulière constante.
En effet, la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E) puisque :

$$\begin{cases} f_0'(x) = 0 \text{ et} \\ af_0(x) + b = a \times \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 \end{cases}$$

Exemple

Soit (E) l'équation différentielle $y' = 2y + 6$, pour x réel.

- La solution particulière constante de (E) est $f_0(x) = -\dfrac{6}{2} = -3$ puisque

$$\begin{cases} f_0'(x) = 0 \text{ et} \\ 2f_0(x) + 6 = 2 \times (-3) + 6 = 0 \end{cases}$$

- f définie par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution général de $y' = 2y$.
- Donc l'ensemble des solutions de (E) l'équation différentielle $y' = 2y + 6$, est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$\boxed{x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{2x} - 3} \quad , \quad C \in R$$

III.3 Équations différentielles $y' = ay + f$

Propriété 5 ($y' = ay + f$ (Admis))

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) l'équation différentielle $y' = ay + f$ est l'ensemble des fonctions, où C est une constante réelle :

$$x \longmapsto f(x) + f_0(x) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f \text{ solution générale de } y' = ay \\ f_0 \text{ une solution particulière de } (E) \end{cases}$$

Exemple

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = \mathrm{e}^{x}$, pour x réel.

- Une solution particulière constante de (E) est $f_0(x) = -\mathrm{e}^{x}$ puisque

$$\begin{cases} f_0'(x) = -\mathrm{e}^{x} \text{ et} \\ f_0'(x) - 2f_0(x) = -\mathrm{e}^{x} + 2\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x} \end{cases}$$

- f définie par $f(x) = C\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution générale de $y' = 2y$.
- Donc l'ensemble des solutions de (E) l'équation différentielle $y' = 2y + 6$, est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$\boxed{x \longmapsto C\ \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}} \quad , \quad C \in R$$

Fin du cours