Math93.com

Probabilités Conditionnelles
Loi Binomiale

Terminale Spécialité

I Probabilités conditionnelles

La notion de probabilité conditionnelle intervient quand pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information est fournie modifiant ainsi la probabilité d'un évènement.

I.1 Définition

Théorème 1

Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$ et on a :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque :
Si $p(B) \neq 0$ on définit de même $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Exercice 1

Une usine produit des articles en grande quantité, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage.
Une étude statistique a permis de constater que 12% des articles sont défectueux, 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage.
Un article choisi au hasard présente un défaut d'emballage. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi un défaut de fabrication ?

Corrigé

Notons F l'évènement « un article prélevé au hasard présente un défaut de fabrication » et E l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente un défaut d'emballage ». La probabilité cherchée est donc :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- 12% des articles ont a un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage d'où $p(F \cup E) = \cdots\cdots$.
- 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage d'où $p(F) = \cdots\cdots$ et $p(E) = \cdots\cdots$.
- La probabilité qu'un article ait les deux défauts est :

$$p(F \cap E) = \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p(F \cap E) = \cdots\cdots\cdots\cdots$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est égale à $\cdots\cdots$.

I.2 Formule des probabilités composées

La relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire de la manière suivante

$$p\left(A\cap B\right)=p_A(B)\times p(A)$$

Cette écriture s'appelle la <u>formule des probabilités composées</u>

Théorème 2

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$. Alors :

$$p\left(A\cap B\right)=p_A(B)\times p(A)=p_B(A)\times p(B)$$

Exercice 2

85 % d'une population est vaccinée contre une maladie. On a constaté que 2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.
Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade ?

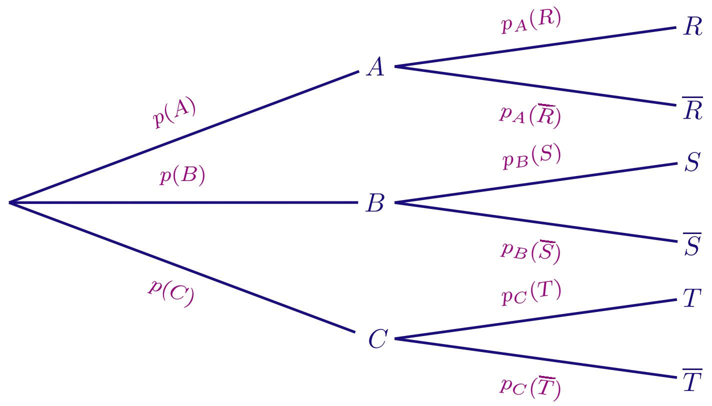
Corrigé

Soit V l'évènement : « Un individu est vacciné » et M l'évènement : « Un individu est malade » ;
Nous avons $p(V)=\cdots\cdots$ et $p_V(M)=\cdots\cdots$.
La probabilité que parmi cette population, une personne soit vaccinée et malade est :

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

II Représentation sous forme d'un arbre pondéré

Une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



$\Longrightarrow \quad p(R\cap A)=p(A)\times p_A(R)$

- La racine de l'arbre est l'univers Ω
- Une branche relie deux évènements.
- Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des évènements qui le composent.
  Par exemple, le chemin dont l'extrémité est R représente l'évènement $A\cap R$.
- Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
  Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.

Règle 1

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.

III Formule des probabilités totales

III.1 Cas de deux évènements

Théorème 3 (Probabilités totales)

Si A est un évènement de Ω tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

$$\boxed{p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p\left(\overline{A}\right)}$$

Remarque *: on pourra lors de l'application de cette formule des probabilités totales indiquer que A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, comme on va le voir ci-après.*

Preuve

Les évènements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles et

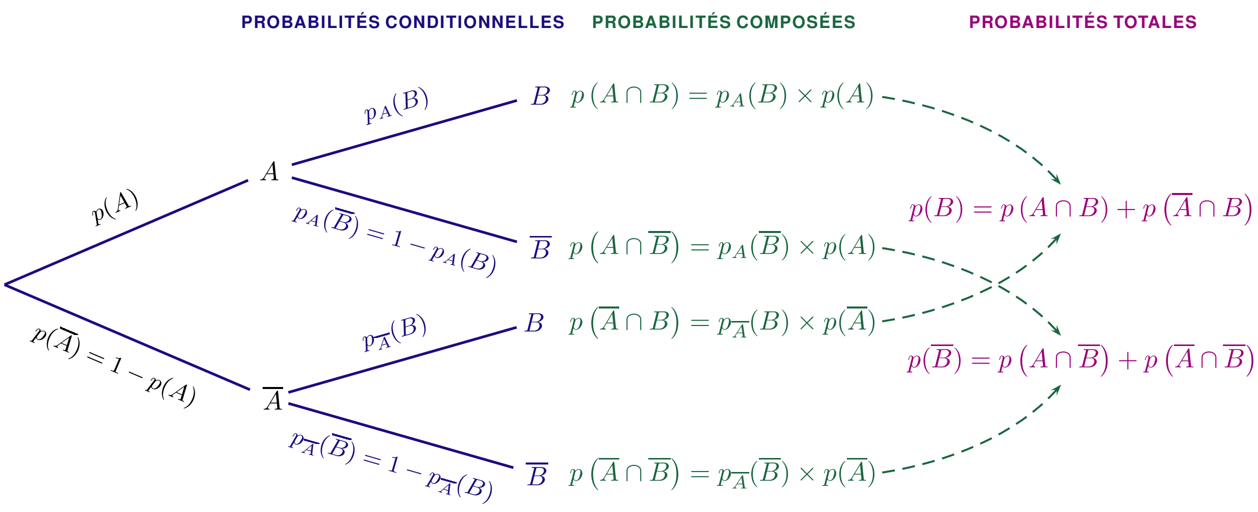
$$B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$$

d'où

$$p(B) = p\,(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$

D'après la formule des probabilités composées

$$p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$



III.2 Partition

Définition 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n\}$ un ensemble d'évènements de probabilités non nulles d'un même univers Ω.
$A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ forment une partition de l'univers Ω si, et seulement si, tout évènement élémentaire de Ω appartient à l'un des évènements A_i et à un seul. C'est à dire si, et seulement si,

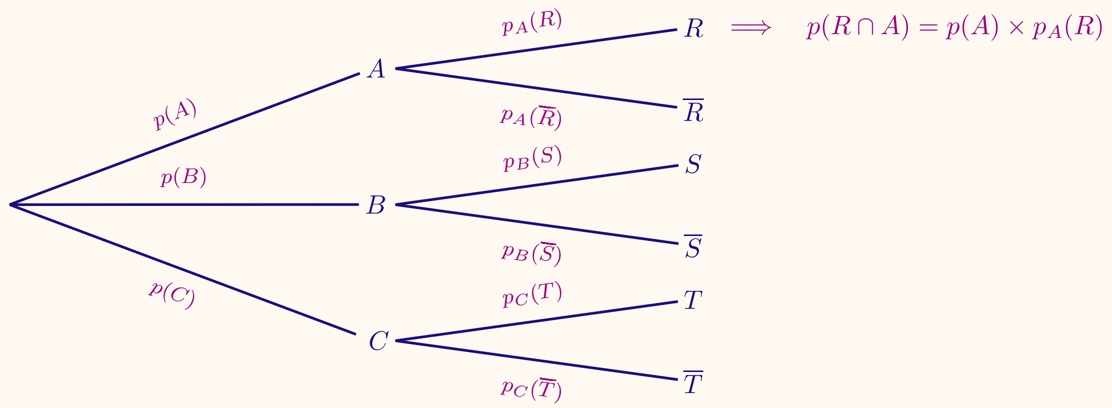
1. Pour tous entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.
2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Remarques :

- Un évènement A de probabilité non nulle et son évènement contraire $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
- Si les évènements $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ forment une partition de Ω alors

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = p\left(A_1\right) + p\left(A_2\right) + \cdots + p\left(A_n\right) = 1$$

Exemple



Les évènements qui se trouvent aux extrémités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'évènement situé à ce nœud.
Par exemple, $\{A, B, C\}$ est une partition de l'univers Ω et $\{S, \overline{S}\}$ est une partition de l'évènement B.

III.3 Formule des probabilités totales

Théorème 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 si $\{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout évènement B de Ω,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

Exercice 3

Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance. 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables. 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables. Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.
On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable ?

Preuve

Notons S l'évènement : « la fiche est celle d'un ordinateur portable » . Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \cdots \\ &= \cdots \\ p(S) &= \cdots \end{aligned}$$

La probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable est $\cdots$.

IV Évènements indépendants

IV.1 Indépendance de deux évènements

Définition 2

Dire que deux évènements évènements A et B sont indépendants signifie que :

$$p\left(A \cap B\right) = p(A) \times p(B)$$

Dire que deux évènements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'évènement de l'autre.

IV.2 Propriété

Théorème 5

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ on a les équivalences :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants } \Leftrightarrow p_B(A) = p(A) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$$

Preuve

Si $p(A) \neq 0$, alors $p\left(A \cap B\right) = p(A) \times p_A(B)$. Ainsi, A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$p(A) \times p(B) = p(A) \times p_A(B) \Leftrightarrow p(B) = p_A(B)$$

V Loi binomiale

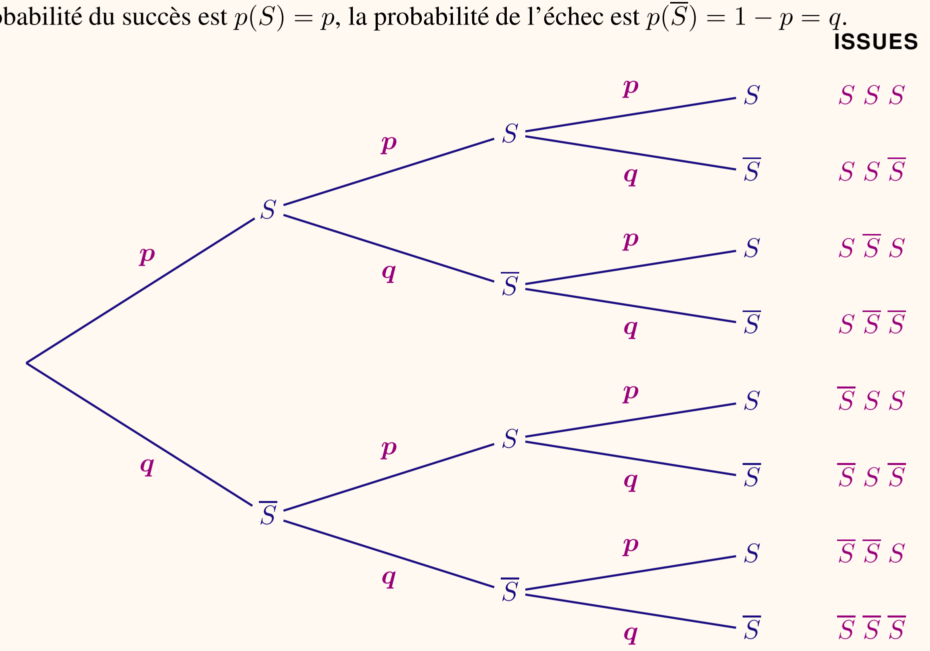
V.1 Schéma de Bernoulli

Définition 3

- Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ayant deux issues, l'une appelée « succès » de probabilité p et l'autre appelée « échec » de probabilité $q = 1 - p$.
- La répétition de n épreuves de Bernoulli, qui sont identiques et indépendantes s'appelle un **schéma de Bernoulli**.

Exemple

On répète 3 fois une épreuve de Bernoulli successivement et de façon indépendante.
La probabilité du succès est $p(S) = p$, la probabilité de l'échec est $p(\overline{S}) = 1 - p = q$.



L'expérience comporte huit issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{S\ S\ S\ ;\ S\ S\ \overline{S}\ ;\ S\ \overline{S}\ S\ ;\ \overline{S}\ S\ S\ ;\ S\ \overline{S}\ \overline{S}\ ;\ \overline{S}\ S\ \overline{S}\ ;\ \overline{S}\ \overline{S}\ S\ ;\ \overline{S}\ \overline{S}\ \overline{S}\}$$

V.2 Coefficients binomiaux

Définition 4

On répète successivement n épreuves de Bernoulli,qui sont identiques et indépendantes.

On appelle **coefficient binomial** et on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves de Bernoulli répétées.

Dans l'exemple précédent, il y a $\binom{3}{2} = 3$ chemins pour lesquels il y a deux succès.

Propriété 1

On peut montrer que pour n et k entiers avec $n \geqslant k$ on a :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

V.3 Loi binomiale

Théorème 6

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli à n épreuves où la probabilité du succès de chaque épreuve est p.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p**.
Cette loi est notée $\mathcal{B}\,(n;p)$. Elle est définie par :

$$P\,(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n$$

Remarque :

L'évènement « obtenir au moins un succès » est l'évènement contraire de l'évènement F « obtenir n échecs consécutifs » d'où

$$P\,(X \geqslant 1) = 1 - P\,(X = 0) = 1 - (1-p)^n$$

Exemple

La loi de probabilité de la loi binomiale $\mathcal{B}\,(4;p)$ de paramètres 4 et p (avec $q = 1 - p$) est :

k	0	1	2	3	4
$P\,(X = k)$	q^4	$4 \times p \times q^3$	$6 \times p^2 \times q^2$	$4 \times p^3 \times q$	p^4

VI Compléments : espérance, variance et écart-type

VI.1 Épreuve de Bernoulli - Loi de Bernoulli

Définition 5

1. Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire présentant deux issues dont l'une, nommée « succès », a pour probabilité p et l'autre $(1-p)$.
2. La variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de « succès » et 0 sinon est appelée **variable aléatoire de Bernoulli**.
3. La loi de probabilité de cette variable aléatoire est appelée **loi de Bernoulli de paramètre p**.

x_i	0	1	Total
$p(X = x_i)$	$1-p$	p	1

Exemple

Par exemple les expériences aléatoires suivantes sont des épreuves de Bernoulli : « lancer une pièce de monnaie et noter la face » , « lancer un dé dont les faces sont numérotées et regarder la parité du résultat » , « dans une usine tirer une pièce produite et regarder si elle présente un défaut ou pas » ...

Propriété 2

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

1. L'espérance de X vaut : $\boxed{E(X) = p}$;
2. La variance de X vaut : $\boxed{V(X) = p(1-p)}$;
3. L'écart-type de X vaut : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1-p)}}$.
4. Interprétations :
   - **La variance** est un **caractère de dispersion**. Plus une variance est élevée plus la dispersion des observations est importante par rapport à la moyenne ; elle est très sensible aux valeurs extrêmes.
   - En pratique c'est l'**écart type** qui est le plus utilisé ; il s'exprime en effet avec les mêmes unités que les observations ; la variance, quant à elle, s'exprime avec les unités au carré.
   - L'**écart type** est la mesure la plus courante de la **dispersion ou de la répartition des données sur la moyenne**.

Preuve

1. Rappel : Espérance d'une v.a. quelconque X

x_i	x_1	$\cdots$	x_n	Total
$p(X = x_i)$	p_1	$\cdots$	p_n	1

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)\, x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots\ldots + p_nx_n$$

Or ici la v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p on a :

x_i	0	1	Total
$p(X = x_i)$	$1-p$	p	1

Et donc l'espérance de X est :

$$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = \underline{p}$$

2. Rappel : Variance d'une v.a. quelconque X

x_i	x_1	$\cdots$	x_n	Total
$p(X = x_i)$	p_1	$\cdots$	p_n	1

$$V(X) = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i^2\right) - E(X)^2$$

Or ici la v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p on a :

x_i	0	1	Total
$p(X = x_i)$	$1-p$	p	1

Et donc la variance de X est (en utilisant la 2e formule) :

$$V(X) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - p = p^2 - p = \underline{p(1-p)}$$

3. L'écart-type de X vaut : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \underline{\sqrt{p(1-p)}}$.

VI.2 Loi de Binomiale

On verra dans le chapitre sur les variables aléatoires que :

Propriété 3

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi Binomiale de paramètres n et p, alors :

1. L'espérance de X vaut : $\boxed{E(X) = np}$;
2. La variance de X vaut : $\boxed{V(X) = np(1-p)}$;
3. L'écart-type de X vaut : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}}$.
4. Interprétations :
   - **La variance** est un **caractère de dispersion**. Plus une variance est élevée plus la dispersion des observations est importante par rapport à la moyenne ; elle est très sensible aux valeurs extrêmes.
   - En pratique c'est l'**écart type** qui est le plus utilisé ; il s'exprime en effet avec les mêmes unités que les observations ; la variance, quant à elle, s'exprime avec les unités au carré.
   - L'**écart type** est la mesure la plus courante de la **dispersion ou de la répartition des données sur la moyenne**.

Fin du cours