



ROC
Les **ROC**, (**R**estitutions **O**rganisées de **C**onnaissances), sont les démonstrations du cours à connaître. Elle sont indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale Spécialité Mathématiques entré en vigueur à la rentrée 2020.
Ce chapitre compte **4 ROC**.

I Rappels : Généralités

I.1 Suites monotones : sens de variations

Définition 1 (Suites croissantes, décroissantes)

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) si pour tout entier n de \mathbb{N} on a : $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$).
Une suite **monotone** est une suite croissante ou décroissante.
Remarque : il peut arriver que la suite soit croissante (ou décroissante) seulement à partir d'un certain rang n_0 .



Méthode

Pour étudier les variations d'une suite on utilise généralement une des méthodes suivantes :

1. Si la suite (u_n) est définie explicitement sous la forme d'un fonction de n soit $u_n = f(n)$, alors on peut étudier les **variations de f sur $[0 ; +\infty[$.**
2. On peut étudier le **signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.**
Si cette différence est positive (resp. négative) pour tout n , alors la suite est croissante (resp. décroissante).
3. Si on a montré que pour tout n , $u_n > 0$, on peut **comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.**

Si pour tout entier n , on a :
$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \\ \text{et } u_n > 0 \end{cases}, \text{ alors } (u_n) \text{ est croissante.}$$



Remarque

Une suite peut être ni croissante, ni décroissante comme par exemple la suite définie pour tout entier n par $u_n = (-1)^n$.

I.2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2

- Une suite (u_n) est **majorée** si il existe un réel M tel que pour tout n on a : $u_n \leq M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** si il existe un réel m tel que pour tout n on a : $m \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque : une suite majorée admet une infinité de majorants, par ex. si elle est majorée par 10, elle l'est aussi par 11 ...

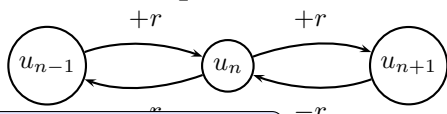


Exemples

- Les suites de terme général $\sin n$, $\cos n$ et $(-1)^n$ sont majorées par 1 et minorées par (-1) (donc bornées).
- La suite de terme général $u_n = n$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.
- Toute suite croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée) par son premier terme.

II Rappels : Suites géométriques et arithmétiques

II.1 Suite Arithmétique



Définition 3 (Suite arithmétique)

Une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est dite **arithmétique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en y ajoutant une constante r , appelée **raison**.

$$(u_n)_{n \geq p} : \begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Propriété 1 (Terme général suite arithmétique)

Pour tout n entier, $n \geq p$:

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Pour $p = 0$ on a pour tout n entier, $n \geq 0$:

$$u_n = u_0 + nr$$

Pour $p = 1$ on a pour tout n entier, $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

Propriété 2 (Variations d'une suite arithmétique)

- Si la raison r est positive strictement ($r > 0$), alors la suite arithmétique est croissante.
- Si la raison r est négative strictement ($r < 0$), alors la suite arithmétique est décroissante.

Propriété 3 (Somme termes consécutifs suite arithmétique)

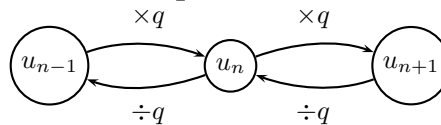
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors pour tout entier n ,

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \dots + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = (n + 1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

Cette formule peut se généraliser de la façon suivante :

$$\sum_{k=p}^n u_k = \text{nb termes} \times \frac{\text{1er} + \text{dernier}}{2}$$

II.2 Suite Géométrique



Définition 4 (Définition suite géométrique)

Une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est dite **géométrique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par une constante q , appelée **raison**.

$$(u_n)_{n \geq p} : \begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = q \times u_n \end{cases}$$

Propriété 4 (Terme général suite géométrique)

Pour tout n entier, $n \geq p$:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Si $p = 0$, pour $n \geq 0$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Si $p = 1$, pour $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Propriété 5 (Variations suite géométrique)

Une suite géométrique de raison q est monotone si $q \geq 0$.

- Si $q = 0$ ou $q = 1$, la suite est constante.
- Si le 1^{er} terme est strictement positif :

$$\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{ la suite est croissante;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{ elle est décroissante.} \end{cases}$$

- Si le 1^{er} terme est strictement négatif :

$$\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{ la suite est décroissante;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{ elle est croissante.} \end{cases}$$

Propriété 6 (Somme termes consécutifs suite géométrique)

Soit (u_n) géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 , alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \dots + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = u_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

Cette formule peut se généraliser de la façon suivante :

$$\sum_{k=p}^n u_k = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q}$$

III Suites convergentes

III.1 Définition

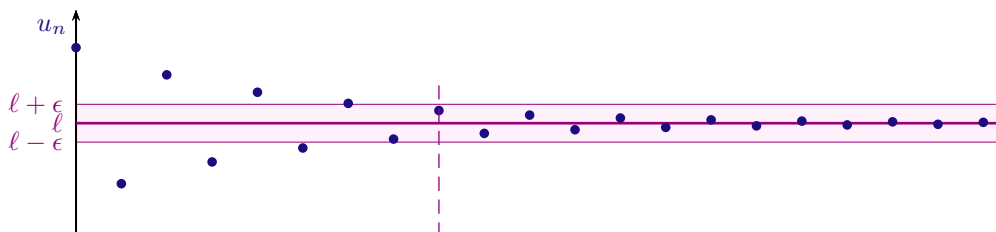
Définition 5 (Suite convergente)

- On dit qu'une suite (u_n) **converge vers le réel ℓ** si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang p . On écrira :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

- Interprétation graphique**

Si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang p , tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell - \epsilon$ et $y = \ell + \epsilon$.



Le rang p est le rang à partir duquel « u_n est à une distance de ℓ inférieure à ϵ »

- Remarques**

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.
- Si (u_n) converge vers ℓ , alors il en est de même pour les suite (u_{n+1}) , (u_{2n}) , (u_{2n+1}) .
- Toute suite constante est convergente.

Définition 6 (Pour le supérieur)

Tout intervalle contenant ℓ contient un intervalle centré en ℓ de la forme $] \ell - \epsilon ; \ell + \epsilon [$ avec $\epsilon > 0$. On a donc aussi :

- La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \in] \ell - \epsilon ; \ell + \epsilon [$
- La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$, $|u_n - \ell| < \epsilon$
- Ou encore comme en Fac ou en prépa. : la suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq p \implies |u_n - \ell| < \epsilon)$$



Remarque

Pourquoi des intervalles ouverts ?

Dans la définition d'une limite finie on a des intervalles ouverts. Si on remplace "intervalle ouvert" par "intervalle fermé", cela voudrait dire par exemple que l'intervalle $[\ell ; \ell] = \{\ell\}$ (qui est bien un "intervalle fermé contenant ℓ ") doit contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Avec cette définition, seules les suites constantes égales à ℓ pourraient donc converger (ou au moins constantes à partir d'un certain rang), ce ne serait pas très intéressant.

Pour éviter cela :

- soit on reste sur les intervalles ouverts (l'intervalle $] \ell ; \ell [= \emptyset$ ne contient pas ℓ et on ne peut donc pas l'utiliser dans la définition ; on évite ainsi le problème) ;
- soit on ne prend en considération que les "intervalles fermés contenant ℓ et dont ℓ n'est pas une borne".

III.2 Exemples de référence

Propriété 7

Les suites de termes général $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots, \frac{1}{n^p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) sont convergentes vers 0.



Preuve

Convergence de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$.

On cherche à montrer que cette suite tend vers 0. Donc pour tout $\epsilon > 0$, on cherche p tel que :

$$\forall n > p \quad -\epsilon < u_n < \epsilon$$

Soit $I =]-\epsilon; \epsilon[$ un intervalle ouvert de centre 0, avec ϵ réel positif non nul.

Soit $n > 0$. Remarquons que si $\frac{1}{n} \in I$, alors puisque $n > 0$, on a $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ et réciproquement. De ce fait la décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* implique que :

$$\frac{1}{n} \in]-\epsilon; \epsilon[\iff 0 < \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon} = p$$

Donc en prenant $p = \frac{1}{\epsilon}$ on obtient que pour tout entier n tel que $n > p = \frac{1}{\epsilon}$ on a $u_n = \frac{1}{n}$ qui appartient à l'intervalle $I =]-\epsilon; \epsilon[$.

Par définition, on a prouvé que la suite (u_n) tend vers 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Remarque : la démonstration s'adapte facilement pour les autres suites.

III.3 Unicité de la limite

Propriété 8 (Unicité de la limite)

Si une suite (u_n) converge, alors sa limite est unique.



Démonstration (non exigible)

| Démonstration avec un raisonnement par l'absurde.

III.4 Suite convergente \implies bornée

Propriété 9

Toute suite convergente est bornée



Démonstration (non exigible)

III.5 Algorithmes de seuil 1

Des algorithmes cherchent à déterminer à partir de quel rang, les termes de la suite, sont supérieurs ou inférieurs à une valeur donnée. Par exemple si on sait que la suite (u_n) tend vers une limite ℓ , on peut chercher à savoir à partir de quand tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $] \ell - \epsilon ; \ell + \epsilon [$. Il est alors utile de remarquer que :

$$u_n \in] \ell - \epsilon ; \ell + \epsilon [\iff \ell - \epsilon < u_n < \ell + \epsilon \iff |u_n - \ell| < \epsilon$$

Par exemple considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et de premier terme u_0 . Si on sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tends vers $\ell = 2$, on peut chercher à partir de quel rang, tous les termes sont dans l'intervalle $]2 - 10^{-2} ; 2 + 10^{-2}[$. Ce qui nous donne :

Pseudo Code

```

U ← u₀
N ← 0
Tant que |U - 2| ≥ 10⁻² Faire
    U ← f(U)
    N ← N + 1
Fin Tant que
afficher N
        
```

IV Suites divergentes

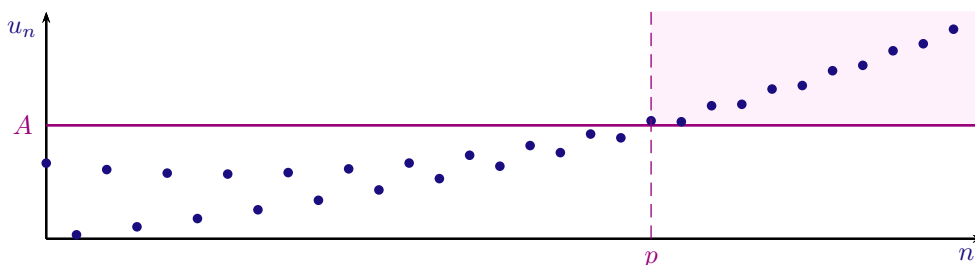
IV.1 Définitions

Définition 7 (Suite divergente)

On dit qu'une suite **diverge** si et seulement si elle ne converge pas.

Définition 8 (Suite divergente vers $+\infty$)

- On dit qu'une suite **diverge** vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang p .
- Interprétation graphique**



Pour tout entier $n \geq p$, $u_n > A$. Donc p est le rang à partir duquel $u_n > A$

- Remarque** : on dit aussi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Définition 9 (Suite divergente vers $-\infty$)

On dit qu'une suite **diverge** vers $-\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $] -\infty ; A [$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang p .

Remarques

- On dit aussi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

- Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ alors la suite $(-u_n)$ diverge vers $-\infty$.

IV.2 Exemples de référence

Propriété 10

Les suites de termes général $\sqrt{n}, n, n^2, n^3, \dots, n^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) sont **divergentes vers $+\infty$** .



Preuve

IV.3 Un exemple à connaître : $u_n = (-1)^n$

Exemples 1

La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge et est bornée.



Preuve

IV.4 Divergente vers $+\infty \implies$ minorée

Propriété 11

1. Toute suite réelle divergeant vers $+\infty$ est minorée.
2. Toute suite réelle divergeant vers $-\infty$ est majorée.



Démonstration (à connaître)

IV.5 Algorithmes de seuil 2

Par exemple si on sait que la suite (u_n) tend vers une limite $+\infty$, on peut chercher à savoir à partir de quand tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A; +\infty[$.

Par exemple considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et de premier terme u_0 . Si on sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tends vers $+\infty$, on peut chercher à partir de quel rang, tous les termes sont supérieur strictement à 10^6 . Ce qui nous donne :

Pseudo Code

```

U ← u0
N ← 0
Tant que U ≤ 106 Faire
    | U ← f(U)
    | N ← N + 1
Fin Tant que
afficher N
    
```

V Opérations sur les limites

Dans ce qui suit, ℓ et ℓ' désignent des réels. On va considérer tous les cas, c'est à dire quand la suite (u_n) tend vers ℓ , vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et quand la suite (v_n) tend vers ℓ' , vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. On résume les résultats dans un tableau, aucune démonstration n'est exigible.

V.1 Limite d'une somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée $\infty - \infty$

V.2 Limite d'un produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$	$\ell \ell'$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$-\infty$ (resp. $+\infty$)	Forme indéterminée $0 \times \infty$

V.3 Limite d'un inverse

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0 avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang soit 0^+	0 avec $u_n < 0$ à partir d'un certain rang soit 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

V.4 Limite d'un quotient

Pour déterminer la limite d'un quotient, on peut l'écrire sous la forme d'un produit : $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F. I. : $\frac{\infty}{\infty}$	F. I. : $\frac{0}{0}$



Méthode : pour lever l'indétermination

Pour étudier la limite d'une suite on utilise les opérations élémentaires sur les limites. Si l'on est confronté à une des 4 formes indéterminées on transforme l'expression. On peut essayer les méthodes suivantes :

1. Factoriser les expressions par le terme qui tend le plus vite vers l'infini, le terme dominant avec dans cet ordre :

$$\sqrt{n} \rightarrow n \rightarrow n^2 \rightarrow n^3 \dots$$

2. Penser à l'expression conjuguée si des racines carrées apparaissent.
3. On peut aussi majorer l'expression, en valeur absolue ou trouver un encadrement par des suites dont on connaît les limites et appliquer les théorèmes de comparaison.

Voir les exercices du TD n°2.

VI Théorèmes de comparaison

VI.1 Comparaison pour les limites infinies : ROC (exigible)

Théorème 1

Si les suites (u_n) et (v_n) sont telles que :

- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang ;
- la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

alors, la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$



ROC 1 : Exigible

Théorème 2

Si les suites (u_n) et (v_n) sont telles que :

- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang ;
- la suite (v_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

alors, la suite (u_n) tend vers $-\infty$

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$



Preuve

| Ce démontre en appliquant le théorème 1 aux suites $(-u_n)$ et $(-v_n)$.

VI.2 Comparaison pour les limites finies

VI.2.1 Passage à la limite d'une inégalité

Propriété 12 (Admis)

- Si la suite (u_n) a pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$.
- et que la suite (v_n) a pour limite ℓ' quand n tend vers $+\infty$.
- et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang

alors, $\ell \leq \ell'$.

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \end{cases} \implies \ell \leq \ell'$$

ATTENTION : en passant à la limite on obtient des inégalités au sens large.

$$\begin{cases} u_n < v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \end{cases} \implies \ell < \ell'$$

**Exemple**

Pour tout entier $n > 0$ on a :

$$u_n = \frac{1}{n+5} < v_n = \frac{1}{n}$$

Et pourtant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

VI.2.2 Théorème d'encadrement ou des gendarmes**Théorème 3 (Admis)**

Si les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) sont telles que :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ,
- les suites (u_n) et (w_n) ont la même limite finie ℓ ,

alors, la suite (v_n) a pour limite finie ℓ .

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{array} \right. \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$

Exemples 2 (Important)

Lorsque la suite n'est pas de signe constant, on utilise souvent une majoration avec la valeur absolue.

Par exemple soit la suite de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ définie pour $n > 0$. Étudier la limite de la suite.

VII Limite d'une suite géométrique : ROC

Théorème 4 (Limite d'une suite géométrique de terme général (q^n))

Soit q un nombre réel :

- Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

- Si $-1 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

- Si $q < -1$ alors la suite géométrique de terme général q^n n'admet pas de limite finie ou infinie.

Remarques

Pour $q = 1$, la suite (q^n) est constante et égale à 1 donc convergente.

Pour $q = -1$, la suite (q^n) prend alternativement les valeurs 1 et -1 suivant la parité de n , elle n'admet pas de limite. Voir la démonstration dans l'exemple 1 du IV.3 page 6.



ROC 2 : Exigible



Point Bac

Au bac on procède souvent par étapes successives.

Par exemple

Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par

$$a_n = 200 \times 0,75^n + 500$$

Ici, $-1 < q = 0,75 < 1$ et d'après le théorème 4, la suite géométrique de terme général $0,75^n$ converge vers 0 et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,75)^n = 0$$

Donc en multipliant par 200

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,75)^n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} 200 \times (0,75)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (a_n) en ajoutant 500 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 200 \times 0,75^n + 500 = 500 \quad \text{soit} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 500}$$

VIII Limites des suites monotones

VIII.1 Suite croissante de limite ℓ : ROC

Propriété 13 (ROC)

Si une suite **croissante** a pour limite ℓ , alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ



Attention

Si la suite n'est pas monotone, la propriété n'est pas toujours vérifiée.

Soit par exemple la suite de TG $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ définie pour $n > 0$ de l'exemple 2 de la page 9.

On a montré que la suite tendait vers 0 mais tous les termes ne sont pas inférieurs à 0.



ROC 3 : Exigible

VIII.2 Suite croissante et majorée, décroissante et minorée (Admis)

Théorème 5 (Suite croissante et majorée, décroissante et minorée (Admis))

1. Toute suite **croissante et majorée** par un réel M est convergente et sa limite ℓ vérifie : $\ell \leq M$.
2. Toute suite **décroissante et minorée** par un réel m est convergente et sa limite ℓ vérifie : $m \leq \ell$.

VIII.3 Suite croissante et non majorée : ROC

Théorème 6 (Suite croissante et non majorée : ROC)

1. Toute suite **croissante et non majorée** diverge vers $+\infty$.
2. Toute suite **décroissante et non minorée** diverge vers $-\infty$.



ROC 4 : Exigible

IX Complément : Algorithmes de seuil

Des algorithmes cherchent à déterminer à partir de quel rang, les termes de la suite qui est supposée monotone, sont supérieurs ou inférieurs à une valeur donnée. On cherche le seuil à partir duquel le terme général d'une suite est inférieur ou supérieur à un nombre donné.



Exemple

Soit (r_n) la suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $r_0 = 50\,000$ donc son terme général est :

$$\forall n \in \mathbb{N}; r_n = 50\,000 \times 0,96^n$$

On cherche le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000 par exemple. C'est à dire que l'on veut déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geq p$,

$$r_n = 50\,000 \times 0,96^n \leq 30\,000$$

- D'après le théorème 4, comme la raison $0 < q = 0,96 < 1$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,96^n = 0$$

et donc en multipliant par 50 000

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 50\,000 \times 0,96^n = 0$$

- D'après la propriété 5, la suite (r_n) est décroissante car de premier terme strictement positif et de raison $q \in]0; 1[$.

IX.0.1 Avec un tableau de valeurs

On peut utiliser la calculatrice pour obtenir ce seuil (arrondi à l'unité on obtient) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...	11	12	13
r_n	50 000	48 000	46 080	44 237	42 467	40 769	39 138	37 572	...	31 912	30 635	29 410

On voit que pour $p = 13$, on a $r_{13} < 30\,000$ et le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, $r_n \leq 30\,000$ est bien $p = 13$.

IX.0.2 Avec un algorithme en pseudo code

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000.

C'est à dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, $50\,000 \times 0,96^n \leq 30\,000$.



Exemple

Puisque (r_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $r_0 = 50\,000$ donc pour tout n :

$$\begin{cases} r_{n+1} = 0,96 \times r_n \\ r_0 = 50\,000 \end{cases}$$

Pseudo Code

```

U ← 50 000
N ← 0
Tant que U ≥ 30 000 Faire
    U ← 0,96 × U
    N ← N + 1
Fin Tant que
afficher N
    
```



Exemple

Puisque (r_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $r_0 = 50\,000$ donc son terme général est :

$$\forall n \in \mathbb{N}; r_n = 50\,000 \times 0,96^n$$

Pseudo Code

```

U ← 50 000
N ← 0
Tant que U ≥ 30 000 Faire
    U ← 50 000 × 0.96^N
    N ← N + 1
Fin Tant que
afficher N
    
```

PROGRAMMATION SUR CALCULATRICES	
TEXAS	CASIO
PROGRAM : SEUIL	===== SEUIL =====
: 0 → N	0 → N ↓
: 50000 → U	50000 → U ↓
: While U > 30000	While U > 30000 ↓
: N + 1 → N	N + 1 → N ↓
: 0.96*U → U	0.96*U → U ↓
: End	WhileEnd ↓
: Disp N	N

• **Analyse de l’algorithme**

Tant que la condition $U > 30\,000$ est vraie, on effectue la suite d’instructions situées à l’intérieur de la boucle.

Étapes	Tests	N	U
Initialisation	X	0	50000
Étape 1	$U = 50\,000 > 30\,000$: Vrai	1	48000
Étape 2	$U = 48\,000 > 30\,000$: Vrai	2	46080
Étape 3	$U \approx 46\,080 > 30\,000$: Vrai	3	44237
...
Étape 12	$U \approx 31\,912 > 30\,000$: Vrai	12	30635
Étape 13	$U \approx 30\,635 > 30\,000$: Vrai	13	29410
Étape 14	$U \approx 29\,410 > 30\,000$: FAUX	STOP	

L’algorithme affiche $N = 13$. Donc pour tout entier $n \geq 13$, on a $50000 \times 0,96^n \leq 30000$.

↩ **Fin du cours** ↪