Math93.com

Suites

Terminale Spécialité

ROC

Les **ROC, (Restitutions Organisées de Connaissances)**, sont les démonstrations du cours à connaître. Elle sont indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale Spécialité Mathématiques entré en vigueur à la rentrée 2020.
Ce chapitre compte **4 ROC**.

I Rappels : Généralités

I.1 Suites monotones : sens de variations

Définition 1 (Suites croissantes, décroissantes)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) si pour tout entier n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$).
Une suite **monotone** est une suite croissante ou décroissante.
Remarque : il peut arriver que la suite soit croissante (ou décroissante) seulement à partir d'un certain rang n_0.

Méthode

Pour étudier les variations d'une suite on utilise généralement une des méthodes suivantes :

1. Si la suite (u_n) est définie explicitement sous la forme d'un fonction de n soit $u_n = f(n)$, alors on peut étudier les **variations de f sur** $[0\ ;\ +\infty[$.
2. On peut étudier le **signe de la différence $u_{n+1} - u_n$**.

   Si cette différence est positive (resp. négative) pour tout n, alors la suite est croissante (resp. décroissante).
3. Si on a montré que pour tout n, $\boldsymbol{u_n > 0}$, on peut **comparer le quotient** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ **à 1**.

   Si pour tout entier n, on a : $\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \\ \text{et } \ u_n > 0 \end{cases}$, alors (u_n) est croissante.

Remarque

Une suite peut être ni croissante, ni décroissante comme par exemple la suite définie pour tout entier n par $u_n = (-1)^n$.

I.2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2

- Une suite (u_n) est **majorée** si il existe un réel M tel que pour tout n on a : $\boldsymbol{u_n \leqslant M}$.
- Une suite (u_n) est **minorée** si il existe un réel m tel que pour tout n on a : $\boldsymbol{m \leqslant u_n}$.
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque : une suite majorée admet une infinité de majorants, par ex. si elle est majorée par 10, elle l'est aussi par 11 ...

Exemples

- Les suites de terme général sin n, cos n et $(-1)^n$ sont majorées par 1 et minorées par (-1) (donc bornées).
- La suite de terme général $u_n = n$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.
- Toute suite croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée) par son premier terme.

II Rappels : Suites géométriques et arithmétiques

II.1 Suite Arithmétique

$$\begin{tikzcd} u_{n-1} \arrow[r, bend left, "+r"] & u_n \arrow[l, bend left, "-r"] \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{n+1} \arrow[l, bend left, "-r"] \end{tikzcd}$$

Définition 3 (Suite arithmétique)

Une suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est dite **arithmétique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en y ajoutant une constante r, appelée **raison**.

$$(u_n)_{n\geqslant p} \quad : \quad \begin{cases} u_p & \\ u_{n+1} & = u_n + r \end{cases}$$

Propriété 1 (Terme général suite arithmétique)

Pour tout n entier, $n \geqslant p$:

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

Pour $p = 0$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Pour $p = 1$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 1$:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$$

Propriété 2 (Variations d'une suite arithmétique)

- Si la raison r est positive strictement ($r > 0$), alors la suite arithmétique est croissante.
- Si la raison r est négative strictement ($r < 0$), alors la suite arithmétique est décroissante.

Propriété 3 (Somme termes consécutifs suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout entier n,

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = (n+1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

Cette formule peut se généraliser de la façon suivante :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = \text{nb termes} \times \frac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}}$$

II.2 Suite Géométrique

$$\begin{tikzcd} u_{n-1} \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_n \arrow[l, bend left, "\div q"] \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{n+1} \arrow[l, bend left, "\div q"] \end{tikzcd}$$

Définition 4 (Définition suite géométrique)

Une suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est dite **géométrique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par une constante q, appelée **raison**.

$$(u_n)_{n\geqslant p} \quad : \quad \begin{cases} u_p & \\ u_{n+1} & = q \times u_n \end{cases}$$

Propriété 4 (Terme général suite géométrique)

Pour tout n entier, $n \geqslant p$:

$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

Si $p = 0$, pour $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

Si $p = 1$, pour $n \geqslant 1$:

$$\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$$

Propriété 5 (Variations suite géométrique)

Une suite géométrique de raison q est monotone si $q \geqslant 0$.

- Si $q = 0$ ou $q = 1$, la suite est constante.
- Si le 1^{er} terme est <u>strictement positif</u> :

$$\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{la suite est croissante;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{elle est décroissante.} \end{cases}$$

- Si le 1^{er} terme est <u>strictement négatif</u> :

$$\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{la suite est décroissante;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{elle est croissante.} \end{cases}$$

Propriété 6 (Somme termes consécutifs suite géométrique)

Soit (u_n) géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = u_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

Cette formule peut se généraliser de la façon suivante :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = 1^{\text{er}} \text{ terme } \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q}}$$

III Suites convergentes

III.1 Définition

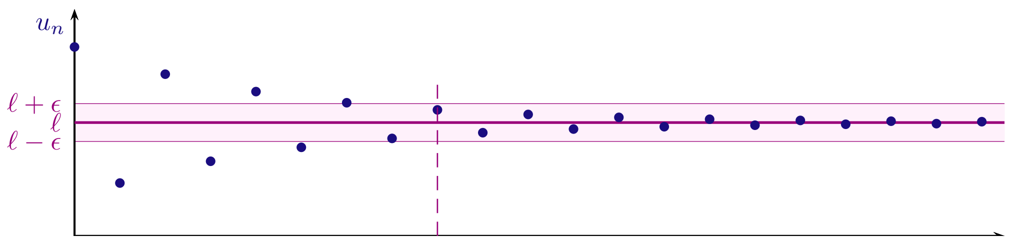
Définition 5 (Suite convergente)

1. On dit qu'un suite (u_n) **converge vers le réel ℓ** si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang p. On écrira :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

2. **Interprétation graphique**

Si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang p, tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell - \epsilon$ et $y = \ell + \epsilon$.



Le rang p est le rang à partir duquel « u_n est à une distance de ℓ inférieure à ϵ »

3. **Remarques**

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.
- Si (u_n) converge vers ℓ, alors il en est de même pour les suite (u_{n+1}), (u_{2n}), (u_{2n+1}).
- Toute suite constante est convergente.

Définition 6 (Pour le supérieur)

Tout intervalle contenant ℓ contient un intervalle centré en ℓ de la forme $]\ell - \epsilon\,;\,\ell + \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$. On a donc aussi :

- La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier p tel que pour tout $n \geqslant p$, $u_n \in\,]\ell - \epsilon\,;\,\ell + \epsilon[$
- La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier p tel que pour tout $n \geqslant p$, $|u_n - \ell| < \epsilon$
- Ou encore comme en Fac ou en prépa. : la suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si

$$\forall\epsilon > 0 \;,\; \exists p \in \mathbb{N} \;,\; \forall n \in \mathbb{N} \;,\; \Big(n \geqslant p \Longrightarrow |u_n - \ell| < \epsilon\Big)$$

Remarque

Pourquoi des intervalles ouverts ?
Dans la définition d'une limite finie on a des intervalles ouverts. Si on remplace "intervalle ouvert" par "intervalle fermé", cela voudrait dire par exemple que l'intervalle $[\ell\,;\,\ell] = \{\ell\}$ (qui est bien un "intervalle fermé contenant ℓ") doit contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Avec cette définition, seules les suites constantes égales à ℓ pourraient donc converger (ou au moins constantes à partir d'un certain rang), ce ne serait pas très intéressant.
Pour éviter cela :

- soit on reste sur les intervalles ouverts (l'intervalle $]\ell\,;\,\ell[= \varnothing$ ne contient pas ℓ et on ne peut donc pas l'utiliser dans la définition ; on évite ainsi le problème) ;
- soit on ne prend en considération que les "intervalles fermés contenant ℓ et dont ℓ n'est pas une borne" .

III.2 Exemples de référence

Propriété 7

Les suites de termes général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n^3}, \cdots, \dfrac{1}{n^p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ sont convergentes vers 0.

Preuve

Convergence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$.
On cherche à montrer que cette suite tend vers 0. Donc pour tout $\epsilon > 0$, on cherche p tel que :

$$\forall n > p \quad -\epsilon < u_n < \epsilon$$

Soit $I =]-\epsilon\,;\,\epsilon[$ un intervalle ouvert de centre 0 , avec ϵ réel positif non nul.
Soit $n > 0$. Remarquons que si $\dfrac{1}{n} \in I$, alors puisque $n > 0$, on a $0 < \dfrac{1}{n} < \epsilon$ et réciproquement. De ce fait la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ implique que :

$$\frac{1}{n} \in]-\epsilon\,;\,\epsilon[\iff 0 < \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon} = p$$

Donc en prenant $p = \dfrac{1}{\epsilon}$ on obtient que pour tout entier n tel que $n > p = \dfrac{1}{\epsilon}$ on a $u_n = \dfrac{1}{n}$ qui appartient à l'intervalle $I =]-\epsilon\,;\,\epsilon[=]0-\epsilon\,;\,0+\epsilon[$.
Par définition, on a prouvé que la suite (u_n) tend vers 0.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Remarque : la démonstration s'adapte facilement pour les autres suites.

III.3 Unicité de la limite

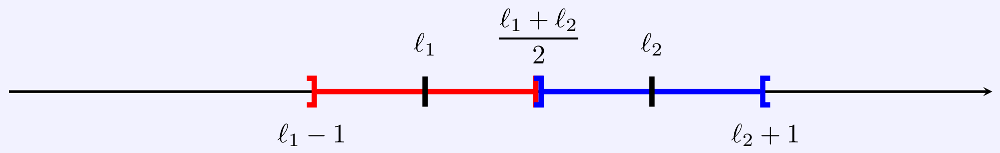
Propriété 8 (Unicité de la limite)

Si une suite (u_n) converge, alors sa limite est unique.

Démonstration (non exigible)

Démonstration avec un raisonnement par l'absurde.
Supposons que la suite (u_n) converge vers deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 < \ell_2$.

- Alors puisque la suite (u_n) converge vers ℓ_1, l'intervalle ouvert $\left]\ell_1 - 1\,;\,\dfrac{\ell_1+\ell_2}{2}\right[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p_1.
- Et puisque la suite (u_n) converge vers ℓ_2, l'intervalle ouvert $\left]\dfrac{\ell_1+\ell_2}{2}\,;\,\ell_2+1\right[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p_2.



Donc pour n plus grand que $N = max(p_1\,;\,p_2)$, on devrait avoir u_n qui appartient aux deux intervalles qui sont disjoints.
C'est donc impossible ce qui prouve que la suite (u_n) ne peut pas avoir deux limites finies distinctes.

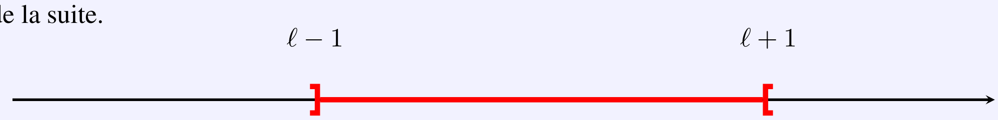
III.4 Suite convergente $\Longrightarrow$ bornée

Propriété 9

Toute suite convergente est bornée

Démonstration (non exigible)

Supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ. A partir d'un certain rang p, l'intervalle ouvert $]\ell-1\,;\,\ell+1[$ contient tous les termes de la suite.



- Donc partir du rang p, tous les termes sont donc inférieur à $\ell+1$ et supérieurs à $\ell-1$.
  Pour $n \geqslant p$, on a $\ell-1 \leqslant u_n \leqslant \ell+1$.
- Avant, il y a un nombre fini de termes dont on peut trouver le maximum. Donc si on note $M = max\,(u_0\,;\,u_1\,;\,\cdots\,;\,u_p)$ et $m = min\,(u_0\,;\,u_1\,;\,\cdots\,;\,u_p)$, on a pour $0 \leqslant n \leqslant p$, alors $m \leqslant u_n \leqslant N$.
- Conclusion : pour tout entier n, on a :

$$min\,(m\,;\,\ell-1)\,u_n \leqslant max\,(M\,;\,\ell+1)$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée.

III.5 Algorithmes de seuil 1

Des algorithmes cherchent à déterminer à partir de quel rang, les termes de la suite , sont supérieurs ou inférieurs à une valeur donnée. Par exemple si on sait que la suite (u_n) tend vers une limite ℓ, on peut chercher à savoir à partir de quand tous les termes de la suite sont dans l'intervalle : $]\ell-\epsilon\,;\,\ell+\epsilon[$. Il est alors utile de remarquer que :

$$u_n \in\,]\ell-\epsilon\,;\,\ell+\epsilon[\iff \ell-\epsilon < u_n < \ell+\epsilon \iff |u_n-\ell| < \epsilon$$

Par exemple considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et de premier terme u_0. Si on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tends vers $\ell = 2$, on peut chercher à partir de quel rang, tous les termes sont dans l'intervalle $\left]2-10^{-2}\,;\,\ell+10^{-2}\right[$. Ce qui nous donne :

Pseudo Code

```
U ← u0
N ← 0
Tant que |U − 2| ⩾ 10^−2   Faire
    U ← f(U)
    N ← N + 1
Fin Tant que
afficher N
```

IV Suites divergentes

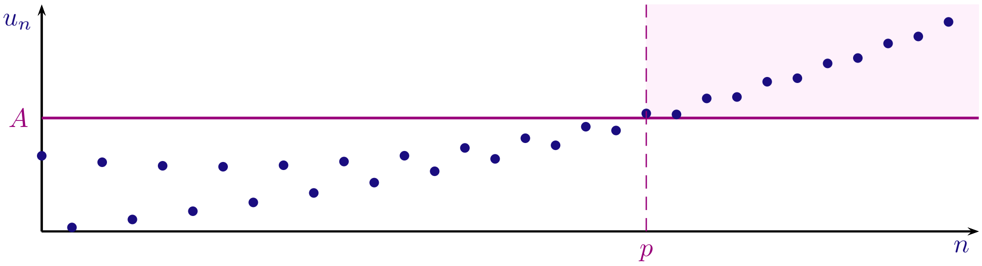
IV.1 Définitions

Définition 7 (Suite divergente)

On dit qu'un suite **diverge** si et seulement si elle ne converge pas.

Définition 8 (Suite divergente vers $+\infty$)

- On dit qu'un suite **diverge** vers $+\infty$ si et seulement tout intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang p.
- **Interprétation graphique**



Pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n > A$. Donc p est le rang à partir duquel $u_n > A$

- **Remarque** : on dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Définition 9 (Suite divergente vers $-\infty$)

On dit qu'un suite **diverge** vers $-\infty$ si et seulement tout intervalle de la forme $]-\infty\ ;\ A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang p.

Remarques

- On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

- Si la suite (u_n) diverge $+\infty$ alors la suite $(-u_n)$ diverge vers $-\infty$.

IV.2 Exemples de référence

Propriété 10

Les suites de termes général $\sqrt{n}, n, n^2, n^3, \cdots, n^p \quad (p \in \mathbb{N}^*)$ sont **divergentes vers** $+\infty$.

Preuve

Montrons que la suite de terme général $\sqrt{n}$ est divergente vers $+\infty$.
Soit A un réel que l'on peut supposé être positif et aussi grand que l'on veut.
On cherche donc à déterminer un entier p tel que pour tout $n > p$, on a : $u_n = \sqrt{n} > A$.
Or on a d'après la croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$:

$$\sqrt{n} > A \iff n > A^2 = p$$

Donc il suffit de prendre $p = A^2$, ainsi si

$$n > p = A^2 \Longrightarrow u_n = \sqrt{n} > A$$

Donc si $n > A^2$, alors $u_n = \sqrt{n}$ appartient à l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$ ce qui prouve que la suite de terme général $\sqrt{n}$ est divergente vers $+\infty$.

Remarque : la démonstration s'adapte facilement pour les autres suites.

IV.3 Un exemple à connaître : $u_n = (-1)^n$

Exemples 1

La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge et est bornée.

Preuve

- La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ prend les valeurs (-1) et 1 selon la parité de n donc elle est bornée. Pour tout n on a :
$$-1 \leqslant u_n \leqslant 1$$
- La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée donc elle ne peut pas tendre (ou diverger) vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si on suppose que (u_n) tende vers une limite finie ℓ. Alors l'intervalle $]\ell - 0,1\,;\,\ell + 0,1[$ devrait contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Or cet intervalle est de longueur 0,2, donc il ne peut contenir à la fois 1 et (-1) (les termes de la suite).

  La suite ne converge donc pas vers une limite ℓ.
- Conclusion : le suite (u_n) diverge. Elle n'admet pas de limite mais elle est bornée.

IV.4 Divergente vers $+\infty \Longrightarrow$ minorée

Propriété 11

1. Toute suite réelle divergeant vers $+\infty$ est minorée.
2. Toute suite réelle divergeant vers $-\infty$ est majorée.

Démonstration (à connaître)

1. Supposons que suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors à partir d'un certain rang p, tous les termes sont supérieurs à $A = 1$ par exemple.

   De ce fait la suite (u_n) est minorée par :
$$m = inf\,(u_0\ ;\ u_1\ ;\ u_2\ ;\ \cdots\ ;\ u_p\ ;\ 1)$$
2. Le cas (2) se ramène au cas (1) en considérant la suite $(-u_n)$.

IV.5 Algorithmes de seuil 2

Par exemple si on sait que la suite (u_n) tend vers une limite $+\infty$, on peut chercher à savoir à partir de quand tous les termes de la suite sont dans l'intervalle : $]A\,;\,+\infty[$.
Par exemple considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et de premier terme u_0. Si on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tends vers $+\infty$, on peut chercher à partir de quel rang, tous les termes sont supérieur strictement à 10^6. Ce qui nous donne :

Pseudo Code

```
U ← u0
N ← 0
Tant que U ⩽ 10^6   Faire
    U ← f(U)
    N ← N + 1
Fin Tant que
afficher N
```

V Opérations sur les limites

Dans ce qui suit, ℓ et ℓ' désignent des réels. On va considérer tous les cas, c'est à dire quand la suite (u_n) tend vers ℓ, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et quand la suite (v_n) tend vers ℓ', vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. On résume les résultats dans un tableau, aucune démonstration n'est exigible.

V.1 Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell+\ell'$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée** $\infty - \infty$

V.2 Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$-\infty$ (resp. $+\infty$)	**Forme indéterminée** $0 \times \infty$

V.3 Limite d'un inverse

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0 avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang soit 0^+	0 avec $u_n < 0$ à partir d'un certain rang soit 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

V.4 Limite d'un quotient

Pour déterminer la limite d'un quotient, on peut l'écrire sous la forme d'un produit : $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F. I. :** $\dfrac{\infty}{\infty}$	**F. I. :** $\dfrac{0}{0}$

Méthode : pour lever l'indétermination

Pour étudier la limite d'une suite on utilise les opérations élémentaires sur les limites. Si l'on est confronté à une des 4 formes indéterminées on transforme l'expression. On peut essayer les méthodes suivantes :

1. Factoriser les expressions par le terme4 qui tend le plus vite vers l'infini, le terme dominant avec dans cet ordre :
$$\sqrt{n} \twoheadrightarrow n \twoheadrightarrow n^2 \twoheadrightarrow n^3 \cdots$$
2. Penser à l'expression conjuguée si des racines carrées apparaissent.
3. On peut aussi majorer l'expression, en valeur absolue ou trouver un encadrement par des suites dont on connait les limites et appliquer les théorèmes de comparaison.

Voir les exercices du TD n°2.

VI Théorèmes de comparaison

VI.1 Comparaison pour les limites infinies : ROC (exigible)

Théorème 1

Si les suites (u_n) et (v_n) sont telles que :

- $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang ;
- la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

alors, la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\begin{cases} u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$$

ROC 1 : Exigible

- Puisque $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_0, si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \leqslant v_n$.

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant v_n$$

- Soit A un réel quelconque (aussi grand soit-il). Puisque la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, il existe un entier n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, on a : $u_n > A$.

$$n \geqslant n_1 \Longrightarrow u_n > A$$

- On cherche à montrer qu'il existe un entier p tel que pour $n \geqslant p$, alors $v_n \geqslant A$. Il suffit d'après ce qui précède de choisir $p = max(n_0\ ;\ n_1)$ et l'on a bien :

$$n \geqslant p = max(n_0\ ;\ n_1) \Longrightarrow \begin{cases} u_n > A \\ u_n \leqslant v_n \end{cases} \Longrightarrow v_n > A$$

Ce qui prouve que la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

Théorème 2

Si les suites (u_n) et (v_n) sont telles que :

- $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang ;
- la suite (v_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

alors, la suite (u_n) tend vers $-\infty$

$$\boxed{\begin{cases} u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$$

Preuve

Ce démontre en appliquant le théorème 1 aux suites $(-u_n)$ et $(-v_n)$.

VI.2 Comparaison pour les limites finies

VI.2.1 Passage à la limite d'un une inégalité

Propriété 12 (Admis)

- Si la suite (u_n) a pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$.
- et que la suite (v_n) a pour limite ℓ' quand n tend vers $+\infty$.
- et $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang

alors, $\ell \leqslant \ell'$.

$$\boxed{\begin{cases} u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \end{cases} \Longrightarrow \ell \leqslant \ell'}$$

ATTENTION : en passant à la limite on obtient des inégalités au sens large.

$$\begin{cases} u_n < v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \end{cases} \Longrightarrow \ell \leqslant \ell'$$

Exemple

Pour tout entier $n > 0$ on a :

$$u_n = \frac{1}{n+5} < v_n = \frac{1}{n}$$

Et pourtant

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

VI.2.2 Théorème d'encadrement ou des gendarmes

Théorème 3 (Admis)

Si les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont telles que :

- $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang ,
- les suites (u_n) et (w_n) ont la même limite finie ℓ,

alors, la suite (v_n) a pour limite finie ℓ.

$$\boxed{\begin{cases} u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell}$$

Exemples 2 (Important)

Lorsque la suite n'est pas de signe constant, on utilise souvent une majoration avec la valeur absolue.
Par exemple soit la suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ définie pour $n > 0$. Pour tout entier $n > 0$ on a :

$$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} \Longleftrightarrow -\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Donc par théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

VII Limite d'une suite géométrique : ROC

Théorème 4 (Limite d'une suite géométrique de terme général (q^n))

Soit q un nombre réel :

- Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

- Si $-1 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

- Si $q < -1$ alors la suite géométrique de terme général q^n n'admet pas de limite finie ou infinie.

Remarques
Pour $q = 1$, la suite (q^n) est constante et égale à 1 donc convergente.
Pour $q = -1$, la suite (q^n) prend alternativement les valeurs 1 et -1 suivant la parité de n, elle n'admet pas de limite. Voir la démonstration dans l'exemple 1 du IV.3 page 7.

ROC 2 : Exigible

- **Étape 1** : on suppose connue l'inégalité de Bernoulli démontrée lors du chapitre précédent.
Soit un réel $\alpha > 0$, alors pour tout entier naturel n.

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$$

- **Étape 2** : on étudie cas par cas en utilisant le résultat précédent.

  – Cas 1 : si $q > 1$.
  Puisque $q > 1$ on peut écrire q sous la forme $q = 1 + \alpha$ avec $\alpha > 0$. On applique alors le résultat précédent :

$$q^n = (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$$

  Or puisque $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + n\alpha = +\infty$$

  On applique alors le théorème de comparaison qui implique que :

$$\begin{cases} q^n = (1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + n\alpha = +\infty \end{cases} \underset{\text{Par th. comparaison}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

$$\boxed{q > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty}$$

  – Cas 2 : si $-1 < q < 1 \Longleftrightarrow |q| < 1$ (Non Exigible).
  Si $|q| < 1$ alors $\dfrac{1}{|q|} > 1$ et on peut appliquer le résultat du cas 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$$

  On passe alors à l'inverse (opérations sur les limites) et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = +\infty \underset{\text{Par passage inverse}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0$$

Or on a :

$$-|q|^n \leqslant q^n \leqslant |q|^n$$

Donc par théorème d'encadrement (ou des gendarmes) on obtient :

$$\begin{cases} -|q|^n \leqslant q^n \leqslant |q|^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{|q| < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0}$$

Point Bac

Au bac on procède souvent par étapes successives.
Par exemple
Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par

$$a_n = 200 \times 0,75^n + 500$$

Ici, $-1 < q = 0,75 < 1$ et d'après le théorème 4, la suite géométrique de terme général $0,75^n$ converge vers 0 et :

$$\lim_{n\to+\infty} (0,75)^n = 0$$

Donc en multipliant par 200

$$\lim_{n\to+\infty} (0,75)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 200 \times (0,75)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (a_n) en ajoutant 500 :

$$\lim_{n\to+\infty} 200 \times 0,75^n + 500 = 500 \quad \text{soit} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 500}$$

VIII Limites des suites monotones

VIII.1 Suite croissante de limite ℓ : ROC

Propriété 13 (ROC)

Si une suite **croissante** a pour limite ℓ, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ

Attention

Si la suite n'est pas monotone, la propriété n'est pas toujours vérifiée.
Soit par exemple la suite de TG $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ définie pour $n > 0$ de l'exemple 2 de la page 10.
On a montré que la suite tendait vers 0 mais tous les termes ne sont pas inférieurs à 0.

ROC 3 : Exigible

Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ.
On va raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe un terme $u_p > \ell$ et aboutir à une contradiction.

- Supposons qu'il existe un terme $u_p > \ell$, alors puisque la suite est croissante on a pour tout $n \geqslant p$:

  $$\forall n \geqslant p \Longrightarrow u_n \geqslant u_p > \ell > \ell - 1$$

  Donc l'intervalle $]\ell - 1\,;\, u_p[$ contient ℓ mais aucun des termes qui sont de rang supérieur à p.
- Cela contredit le fait que la suite (u_n) soit de limite ℓ, et donc il n'existe pas de terme supérieur à ℓ.

VIII.2 Suite croissante et majorée , décroissante et minorée (Admis)

Théorème 5 (Suite croissante et majorée, décroissante et minorée (Admis))

1. Toute suite **croissante et majorée** par un réel M est convergente et sa limite ℓ vérifie : $\ell \leqslant M$.
2. Toute suite **décroissante et minorée** par un réel m est convergente et sa limite ℓ vérifie : $m \leqslant \ell$.

VIII.3 Suite croissante et non majorée : ROC

Théorème 6 (Suite croissante et non majorée : ROC)

1. Toute suite **croissante et non majorée** diverge vers $+\infty$.
2. Toute suite **décroissante et non minorée** diverge vers $-\infty$.

ROC 4 : Exigible

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Soit A un réel.

- La suite (u_n) n'est pas majorée par A donc il existe un entier p tel que $u_p > A$.
- La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n \geqslant p$, on a $u_n \geqslant u_p$ et donc :

$$\begin{cases} u_p > A \\ u_n \geqslant u_p \end{cases} \Longrightarrow u_n \geqslant u_p \geqslant A$$

- On vient de montrer que l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang p. Donc la suite (u_n) est divergente vers $+\infty$.

IX Complément : Algorithmes de seuil

Des algorithmes cherchent à déterminer à partir de quel rang, les termes de la suite qui est supposée monotone, sont supérieurs ou inférieurs à une valeur donnée. On cherche le seuil à partir duquel le terme général d'une suite est inférieur ou supérieur à un nombre donné.

Exemple

Soit (r_n) la suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $r_0 = 50\,000$ donc son terme général est :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ r_n = 50\,000 \times 0,96^n$$

On cherche le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000 par exemple. C'est à dire que l'on veut déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$,

$$r_n = 50\,000 \times 0,96^n \leqslant 30\,000$$

- D'après le théorème 4, comme la raison $0 < q = 0,96 < 1$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} 0,96^n = 0$$

  et donc en multipliant par 50 000

$$\lim_{n \to +\infty} 50\,000 \times 0,96^n = 0$$

- D'après la propriété 5, la suite (r_n) est décroissante car de premier terme strictement positif et de raison $q \in]0;1[$.

IX.0.1 Avec un tableau de valeurs

On peut utiliser la calculatrice pour obtenir ce seuil (arrondi à l'unité on obtient) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...	11	12	13
r_n	50 000	48 000	46 080	44 237	42 467	40 769	39 138	37 572	...	31 912	30 635	29 410

On voit que pour $p = 13$, on a $r_{13} < 30\,000$ et le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $r_n \leqslant 30\,000$ est bien $p = 13$.

IX.0.2 Avec un algorithme en pseudo code

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $50\,000 \times 0,96^n \leqslant 30\,000$.

Exemple

Puisque (r_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $r_0 = 50\,000$ donc pour tout n :

$$\begin{cases} r_{n+1} = 0,96 \times r_n \\ r_0 = 50\ 000 \end{cases}$$

Pseudo Code

```
U ← 50 000
N ← 0
Tant que U ⩾ 30 000   Faire
    U ← 0,96 × U
    N ← N + 1
Fin Tant que
afficher N
```

Exemple

Puisque (r_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $r_0 = 50\,000$ donc son terme général est :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ r_n = 50\,000 \times 0,96^n$$

Pseudo Code

```
U ← 50 000
N ← 0
Tant que U ⩾ 30 000   Faire
    U ← 50 000 × 0.96^N
    N ← N + 1
Fin Tant que
afficher N
```

PROGRAMMATION SUR CALCULATRICES	
TEXAS	CASIO
`PROGRAM : SEUIL`	`===== SEUIL =====`
`: 0 → N`	`0 → N ↲`
`: 50000 → U`	`50000 → U ↲`
`: While U > 30000`	`While U > 30000 ↲`
`: N + 1 → N`	`N + 1 → N ↲`
`: 0.96*U → U`	`0.96*U → U ↲`
`: End`	`WhileEnd ↲`
`: Disp N`	`N`

- **Analyse de l'algorithme**
  Tant que la condition $U > 30\,000$ est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle.

Étapes	Tests	N	U
Initialisation	X	0	50000
Étape 1	$U = 50\ 000 > 30\ 000$: Vrai	1	48000
Étape 2	$U = 48\ 000 > 30\ 000$: Vrai	2	46080
Étape 3	$U \approx 46\ 080 > 30\ 000$: Vrai	3	44237
...	...	...	...
Étape 12	$U \approx 31\ 912 > 30\ 000$: Vrai	12	30635
Étape 13	$U \approx 30\ 635 > 30\ 000$: Vrai	13	29410
Etape 14	$U \approx 29\ 410 > 30\ 000$: FAUX	STOP	

L'algorithme affiche $N = 13$. Donc pour tout entier $n \geqslant 13$, on a $50000 \times 0,96^n \leqslant 30000$.

Fin du cours