Math93.com

Variables aléatoires
Loi des Grands nombres

Terminale Spécialité

I Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

En théorie des probabilités, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, est une inégalité permettant de montrer qu'une variable aléatoire prendra avec une faible probabilité une valeur relativement lointaine de son espérance.

Propriété 1 (Inégalité de Bienaymé-Tchébychev)

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Alors pour tout réel $\alpha > 0$ on a :

$$\boxed{P\Big(|X - E(X)| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \frac{V(X)}{\alpha^2}}$$

Preuve

Remarque historique

Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) est un mathématicien français qui a énoncé l'inégalité dite de Bienaymé-Tchébychev en 1853.

Elle porte aussi le nom du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1821) qui l'a démontré en 1867.

Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878)

Propriété 2 (Inégalité de concentration)

Soit M_n une variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = \mu$ et de variance $V(X) = V$.
Alors, pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$\boxed{P\Big(|M_n - E(X)| \geqslant \alpha\Big) \leqslant \frac{V(X)}{n\alpha^2}}$$

Preuve

II Loi faible des grands nombres

Théorème 1 (Loi faible des grands nombres)

Soit M_n une variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = \mu$ et de variance $V(X) = V$.
Alors, pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P\Big(|M_n - \mu| \geqslant \alpha\Big) = 0}$$

Preuve

↫ **Fin du cours** ↬