



Math93.com

Variables aléatoires

Loi des Grands nombres

Terminale Spécialité

I Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

En théorie des probabilités, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, est une inégalité permettant de montrer qu'une variable aléatoire prendra avec une faible probabilité une valeur relativement lointaine de son espérance.

Propriété 1 (Inégalité de Bienaymé-Tchébychev)

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Alors pour tout réel $\alpha > 0$ on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$



Preuve

Soit $E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la v.a. X . Notons l'espérance $m = E(X)$.

Soit l'évènement $A = \{|X - E(X)| \geq \alpha\} = \{|X - m| \geq \alpha\}$ qui est réalisé pour certaines valeurs a_1, \dots, a_k de E (les a_i sont des issues x_i). On peut donc écrire E sous la forme, quitte à ré-indexer les issues de E :

$$E = \{a_1; \dots; a_k; x_{k+1}; \dots; x_n\}$$

On sait que par définition de la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= (x_1 - m)^2 P(X = x_1) + \dots + (x_n - m)^2 P(X = x_n) \\ &= (a_1 - m)^2 P(X = a_1) + \dots + (a_k - m)^2 P(X = a_k) \\ &\quad + (x_{k+1} - m)^2 P(X = x_{k+1}) + \dots + (x_n - m)^2 P(X = x_n) \end{aligned}$$

Tous les termes de cette somme sont positifs, donc en ne gardant que les x_i qui correspondent aux issues a_i de l'évènement A on obtient :

$$V(X) \geq (a_1 - m)^2 P(X = a_1) + \dots + (a_k - m)^2 P(X = a_k)$$

Or pour tout i tel que $1 \leq i \leq k$:

$$A = \{|X - m| \geq \alpha\} = \{a_1; \dots; a_k\} \implies |a_i - m| \geq \alpha \implies |a_i - m|^2 \geq \alpha^2$$

Et donc :

$$\begin{aligned} V(X) &\geq (a_1 - m)^2 P(X = a_1) + \dots + (a_k - m)^2 P(X = a_k) \\ &\geq \alpha^2 P(X = a_1) + \dots + \alpha^2 P(X = a_k) \\ &\geq \alpha^2 \underbrace{(P(X = a_1) + \dots + P(X = a_k))}_{P(A)} \end{aligned}$$

Soit

$$V(X) \geq \alpha^2 P(A) \iff P(A) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$



Remarque historique

Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) est un mathématicien français qui a énoncé l'inégalité dite de Bienaymé-Tchébychev en 1853.

Elle porte aussi le nom du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1821) qui l'a démontré en 1867.



Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878)

Propriété 2 (Inégalité de concentration)

Soit M_n une variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = \mu$ et de variance $V(X) = V$.

Alors, pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$P\left(|M_n - E(X)| \geq \alpha\right) \leq \frac{V(X)}{n\alpha^2}$$



Preuve

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev à la variable aléatoire moyenne M_n :

$$P\left(|M_n - E(M_n)| \geq \alpha\right) \leq \frac{V(M_n)}{n\alpha^2}$$

Or on sait que $E(M_n) = E(X) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{V}{n}$ donc :

$$P\left(|M_n - \mu| \geq \alpha\right) \leq \frac{V}{n\alpha^2}$$

II Loi faible des grands nombres

Théorème 1 (Loi faible des grands nombres)

Soit M_n une variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = \mu$ et de variance $V(X) = V$.

Alors, pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(|M_n - \mu| \geq \alpha\right) = 0$$

**Preuve**

Soit $\alpha > 0$, on a d'après l'inégalité de concentration :

$$0 \leq P(|M_n - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{V}{n\alpha^2}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V}{n\alpha^2} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - \mu| \geq \alpha) = 0$$

↩ **Fin du cours** ↪