Math93.com

Variables aléatoires

Terminale Spécialité

Quelques rappels

Propriété 1

1. **1.** Espérance d'une v.a. quelconque X.

x_i	x_1	$\cdots$	x_n	Total
$p(X=x_i)$	p_1	$\cdots$	p_n	1

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i=\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\,x_i=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+.....+p_nx_n$$

2. Variance d'une v.a. quelconque X.

x_i	x_1	$\cdots$	x_n	Total
$p(X=x_i)$	p_1	$\cdots$	p_n	1

$$V(X)=Var(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i-E(X)\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\times x_i^2\right)-E(X)^2$$

3. L'écart-type de X vaut :

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$$

4. Interprétations :

- **L'espérance** d'une variable aléatoire est, intuitivement, la valeur que l'on s'attend à trouver, en **moyenne**, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire.
  Elle correspond à une moyenne pondérée des valeurs que peut prendre cette variable.
- **La variance** est un **caractère de dispersion**. Plus une variance est élevée plus la dispersion des observations est importante par rapport à la moyenne ; elle est très sensible aux valeurs extrêmes.
- En pratique c'est l'**écart type** qui est le plus utilisé ; il s'exprime en effet avec les mêmes unités que les observations ; la variance, quant à elle, s'exprime avec les unités au carré.
  L'**écart type** est la mesure la plus courante de la **dispersion ou de la répartition des données sur la moyenne**.

I Opérations sur les variables aléatoires

I.1 Produit par un nombre réel et somme de variables aléatoires

Définition 1

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur des univers finis

$$\Omega = \{e_1\ ;\ e_2\ ;\ \cdots\ ;\ e_m\} \quad \text{et} \quad \Omega' = \{e'_1\ ;\ e'_2\ ;\ \cdots\ ;\ e'_m\}$$

qui associent à chaque issue e_i (et e'_i) le réels x_i (et y_i).

x_i	x_1	$\cdots$	x_n	Total
$p(X = x_i)$	p_1	$\cdots$	p_n	1

y_i	y_1	$\cdots$	y_n	Total
$p(Y = y_i)$	q_1	$\cdots$	q_n	1

1. **La variable aléatoire $W = aX$** est la variable aléatoire qui associent à chaque issue e_i le réels ax_i avec $P(W = ax_i) = P(X = x_i)$.

w_i	ax_1	$\cdots$	ax_n	Total
$p(W = w_i)$	p_1	$\cdots$	p_n	1

2. **La somme des v.a. X et Y** est la variable aléatoire $Z = X + Y$ qui associent à chaque issues e_i et e'_i le réels $x_i + y_i$ avec $P(W = w_k)$ qui est la somme de toutes les probabilités $P(X = x_i\ \text{ et }\ Y = y_i)$ telles que $x_i + y_i = w_k$.

Méthode

Pour déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$, il faut commencer par calculer les valeurs prises par Z, puis, pour chaque somme trouvée, déterminer tous les cas donnant cette somme.

Exemple

On lance deux dés équilibrés A et B à six faces (numérotées de 1 à 6). on note :

- X la v.a. qui, à chaque lancer du dé A, associe comme gain algébrique le numéro obtenu s'il est inférieur ou égal à 4 et -10€ sinon.
- Y la v.a. qui, à chaque lancer du dé B, associe comme gain algébrique 0 si le numéro obtenu est multiple de trois, 1€ si c'est le numéro 5 et -5€ sinon.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, de Y.

x_i	-10€	1€	2€	3€	4€	
Évènements	Obtenir 5 ou 6	Obtenir 1	Obtenir 2	Obtenir 3	Obtenir 4	Total
$p(X = x_i)$	....	....	....	....	....	1

y_i	-5€	0€	1€	
Évènements	Obtenir un 1 ou 2 ou 4	Obtenir 3 ou 6	Obtenir 5	Total
$p(Y = y_i)$	....	....	....	1

2. Déterminer la loi de probabilité de $W = 2X$ et $T = 3Y$.

w_i	-20€	2€	4€	6€	8€	
Évènements	Obtenir 5 ou 6	Obtenir 1	Obtenir 2	Obtenir 3	Obtenir 4	Total
$p(W = w_i)$	....	....	....	....	....	1

t_i	-15€	0€	3€	
Évènements	Obtenir un 1 ou 2 ou 4	Obtenir 3 ou 6	Obtenir 5	Total
$p(T = t_i)$	....	....	....	1

3. Déterminer la loi de probabilité de $Z = X + Y$.

Pour cela, il faut déjà déterminer toutes les valeurs possibles prises par Z, on peut s'aider d'un arbre ou plus simplement d'un tableau. Il y a 5 gains différents pour X et 3 pour Y donc Z peut prendre au maximum 15 valeurs différentes. En fait moins car par exemple l'évènement $(Z = 3)$ est obtenu avec $(X = 3)$ et $(Y = 0)$ ou $(X = 2)$ et $(Y = 1)$.

On va faire un tableau pour s'aider à énumérer les différentes valeurs de Z et les issues associées :

	$X = -10$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -5$	$S = -15$	$S = -4$	$S = -3$	$S = -2$	$S = -1$
$Y = 0$	$S = -10$	$S = 1$	$S = 2$	$S = 3$	$S = 4$
$Y = 1$	$S = -9$	$S = 2$	$S = 3$	$S = 4$	$S = 5$

z_i	-15€	-10€	-9€
Évènements	$(X = -10)$ et $(Y = -5)$	$(X = -10)$ et $(Y = 0)$	$(X = -10)$ et $(Y = 1)$
$p(Z = z_i)$	....	....	....

z_i	-4€	-3€	-2€
Évènements	$(X = 1)$ et $(Y = -5)$	$(X = 2)$ et $(Y = -5)$	$(X = 3)$ et $(Y = -5)$
$p(Z = z_i)$	....	....	....

z_i	-1€	1€	2€
Évènements	$(X=4)$ et $(Y=-5)$	$(X=1)$ et $(Y=0)$	$(X=2)$ et $(Y=0)$ ou $(X=1)$ et $(Y=1)$
$p(Z=z_i)$	....	....	....

z_i	3€	4€	5€
Évènements	$(X=3)$ et $(Y=0)$ ou $(X=2)$ et $(Y=1)$	$(X=4)$ et $(Y=0)$ ou $(X=3)$ et $(Y=1)$	$(X=4)$ et $(Y=1)$
$p(Z=z_i)$	....	....	....

4. Déterminer l'espérance des variables aléatoires X, Y , Z, W, T et S.

Propriété 2 (Variables indépendantes)

Soit X et Y deux variables aléatoires. Elles sont indépendantes si quelles que soient les valeurs x_i et y_i on a :

$$\boxed{P(X=x_i \text{ et } Y=y_i)=P(X=x_i)\times P(Y=y_i)}$$

I.2 Propriétés des opérations sur les variables aléatoires

Propriété 3

1. Soit X une v.a. et a un réel. Alors on a :

$$\boxed{E(aX)=a\,E(X)} \;;\; \boxed{V(aX)=a^2\,V(X)} \;;\; \boxed{\sigma(aX)=|a|\;\sigma(X)}$$

2. Soit X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$$

3. Plus généralement, si X_1, ..., X_n sont n variables aléatoires :

$$\boxed{E(X_1+\cdots+X_n)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)}$$

4. Soit a, b des réels et X, Y des v.a.

$$\boxed{E(aX+b)=a\,E(X)+b} \;;\; \boxed{E(aX+bY)=a\,E(X)+b\,E(Y)} \;;\; \boxed{V(aX+b)=a^2\,V(X)}$$

Preuve

Propriété 4

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors on a :

$$\boxed{V(X+Y)=V(X)+V(Y)}$$

II Échantillon d'une loi de probabilité

II.1 Échantillon de taille n d'une loi de probabilité

Définition 2

Soit X une v.a. définie sur l'ensemble Ω des issues d'une expérience aléatoire.
Un échantillon de taille n de la loi de X est une liste $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et identiques suivant cette loi.

Exemple

Soit X la v.a. qui, à chaque pièce issue d'une chaîne de production, associe sa masse en gramme.
On note pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, X_i la v.a. qui, à chaque lot de 10 pièces issue d'une chaîne de production, associe la masse en gramme de la i-ème pièce .
Les variables X_i sont indépendantes, identiques et suivent la même loi que X donc un échantillon de taille $n=10$ de la loi de X est la liste $(X_1, X_2, \cdots, X_{10})$.

Définition 3 (Somme et moyenne)

1. La variable aléatoire **somme** d'un échantillon de taille n de la loi de X est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille n par :

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

2. La variable aléatoire **moyenne** d'un échantillon de taille n de la loi de X est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille n par :

$$M_n = \frac{1}{n} S_n$$

Exemple

Soit X la v.a. qui, à chaque pièce issue d'une chaîne de production, associe sa masse en gramme.
On note pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, X_i la v.a. qui, à chaque lot de 10 pièces issue d'une chaîne de production, associe la masse en gramme de la i-ème pièce .
La variable aléatoire somme est définie par :

$$S_{10} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

et la v.a. moyenne associe à chaque lot de 10 pièces la masse moyenne en grammes

$$M_{10} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}}{10}$$

II.2 Espérance, variance et écart-type de S_n et M_n

Propriété 5 (Somme S_n)

Soit S_n la v.a. somme d'un échantillon de taille n de la v.a. X, alors :

$$\boxed{E(S_n) = n\,E(X)} \quad ; \quad \boxed{V(S_n) = n\,V(X)} \quad ; \quad \boxed{\sigma(S_n) = \sqrt{n}\,\sigma(X)}$$

Propriété 6 (Moyenne M_n)

Soit M_n la v.a. moyenne d'un échantillon de taille n de la v.a. X, alors :

$$\boxed{E(M_n) = E(X)} \quad ; \quad \boxed{V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)} \quad ; \quad \boxed{\sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)}$$

Remarque

Puisque $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$, la variance de la moyenne diminue quand la taille de l'échantillon augmente.
Cette variance quantifie la **fluctuation d'échantillonnage**, c'est à dire l'écart-moyen entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance.

II.3 Espérance et variance de la loi binomiale

Propriété 7

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi Binomiale de paramètres n et p, alors :

1. L'espérance de X vaut : $\boxed{E(X) = np}$;
2. La variance de X vaut : $\boxed{V(X) = np(1-p)}$;
3. L'écart-type de X vaut : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}}$.