



Math93.com

Variables aléatoires

Terminale Spécialité

Quelques rappels

Propriété 1

1. Espérance d'une v.a. quelconque X .

x_i	x_1	\dots	x_n	Total
$p(X = x_i)$	p_1	\dots	p_n	1

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots + p_n x_n$$

2. Variance d'une v.a. quelconque X .

x_i	x_1	\dots	x_n	Total
$p(X = x_i)$	p_1	\dots	p_n	1

$$V(X) = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^n p_i \times x_i^2 \right) - E(X)^2$$

3. L'écart-type de X vaut :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

4. Interprétations :

- **L'espérance** d'une variable aléatoire est, intuitivement, la valeur que l'on s'attend à trouver, en **moyenne**, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Elle correspond à une moyenne pondérée des valeurs que peut prendre cette variable.
- **La variance** est un **caractère de dispersion**. Plus une variance est élevée plus la dispersion des observations est importante par rapport à la moyenne ; elle est très sensible aux valeurs extrêmes.
- En pratique c'est l'**écart type** qui est le plus utilisé ; il s'exprime en effet avec les mêmes unités que les observations ; la variance, quant à elle, s'exprime avec les unités au carré. L'**écart type** est la mesure la plus courante de la **dispersion ou de la répartition des données sur la moyenne**.

I Opérations sur les variables aléatoires

I.1 Produit par un nombre réel et somme de variables aléatoires

Définition 1

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur des univers finis

$$\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_m\} \quad \text{et} \quad \Omega' = \{e'_1; e'_2; \dots; e'_m\}$$

qui associent à chaque issue e_i (et e'_i) le réels x_i (et y_i).

x_i	x_1	\dots	x_n	Total
$p(X = x_i)$	p_1	\dots	p_n	1

y_i	y_1	\dots	y_n	Total
$p(Y = y_i)$	q_1	\dots	q_n	1

1. La variable aléatoire $W = aX$ est la variable aléatoire qui associe à chaque issue e_i le réels ax_i avec $P(W = ax_i) = P(X = x_i)$.

w_i	ax_1	\dots	ax_n	Total
$p(W = w_i)$	p_1	\dots	p_n	1

2. La somme des v.a. X et Y est la variable aléatoire $Z = X + Y$ qui associe à chaque issues e_i et e'_i le réels $x_i + y_i$ avec $P(W = w_k)$ qui est la somme de toutes les probabilités $P(X = x_i \text{ et } Y = y_i)$ telles que $x_i + y_i = w_k$.



Méthode

Pour déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$, il faut commencer par calculer les valeurs prises par Z , puis, pour chaque somme trouvée, déterminer tous les cas donnant cette somme.



Exemple

On lance deux dés équilibrés A et B à six faces (numérotées de 1 à 6). on note :

- X la v.a. qui, à chaque lancer du dé A, associe comme gain algébrique le numéro obtenu s'il est inférieur ou égal à 4 et -10€ sinon.
- Y la v.a. qui, à chaque lancer du dé B, associe comme gain algébrique 0 si le numéro obtenu est multiple de trois, 1€ si c'est le numéro 5 et -5€ sinon.

1. Déterminer la loi de probabilité de X , de Y .

x_i	-10€	1€	2€	3€	4€	
Évènements	Obtenir 5 ou 6	Obtenir 1	Obtenir 2	Obtenir 3	Obtenir 4	Total
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

y_i	-5€	0€	1€	
Évènements	Obtenir un 1 ou 2 ou 4	Obtenir 3 ou 6	Obtenir 5	Total
$p(Y = y_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

2. Déterminer la loi de probabilité de $W = 2X$ et $T = 3Y$.

w_i	-20€	2€	4€	6€	8€	
Évènements	Obtenir 5 ou 6	Obtenir 1	Obtenir 2	Obtenir 3	Obtenir 4	Total
$p(W = w_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

t_i	-15€	0€	3€	
Évènements	Obtenir un 1 ou 2 ou 4	Obtenir 3 ou 6	Obtenir 5	Total
$p(T = t_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

3. Déterminer la loi de probabilité de $Z = X + Y$.

Pour cela, il faut déjà déterminer toutes les valeurs possibles prises par Z , on peut s'aider d'un arbre ou plus simplement d'un tableau. Il y a 5 gains différents pour X et 3 pour Y donc Z peut prendre au maximum 15 valeurs différentes. En fait moins car par exemple l'évènement ($Z = 3$) est obtenu avec ($X = 3$) et ($Y = 0$) ou ($X = 2$) et ($Y = 1$).

On va faire un tableau pour s'aider à énumérer les différentes valeurs de Z et les issues associées :

	$X = -10$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$Y = -5$	$S = -15$	$S = -4$	$S = -3$	$S = -2$	$S = -1$
$Y = 0$	$S = -10$	$S = 1$	$S = 2$	$S = 3$	$S = 4$
$Y = 1$	$S = -9$	$S = 2$	$S = 3$	$S = 4$	$S = 5$

z_i	-15€	-10€	-9€
Évènements	($X = -10$) et ($Y = -5$)	($X = -10$) et ($Y = 0$)	($X = -10$) et ($Y = 1$)
$p(Z = z_i)$	$\frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{36}$	$\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$	$\frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$

z_i	-4€	-3€	-2€
Évènements	($X = 1$) et ($Y = -5$)	($X = 2$) et ($Y = -5$)	($X = 3$) et ($Y = -5$)
$p(Z = z_i)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$

z_i	-1€	1€	2€
Évènements	$(X = 4) \text{ et } (Y = -5)$	$(X = 1) \text{ et } (Y = 0)$	$(X = 2) \text{ et } (Y = 0)$ ou $(X = 1) \text{ et } (Y = 1)$
$p(Z = z_i)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$

z_i	3€	4€	5€
Évènements	$(X = 3) \text{ et } (Y = 0)$ ou $(X = 2) \text{ et } (Y = 1)$	$(X = 4) \text{ et } (Y = 0)$ ou $(X = 3) \text{ et } (Y = 1)$	$(X = 4) \text{ et } (Y = 1)$
$p(Z = z_i)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

4. Déterminer l'espérance des variables aléatoires X, Y, Z, W, T et S .

$$E(X) = -10 \times \frac{2}{6} + \dots + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{-5}{3}$$

$$E(Y) = \frac{-7}{3}$$

$$E(Z) = -4$$

Propriété 2 (Variables indépendantes)

Soit X et Y deux variables aléatoires. Elles sont indépendantes si quelles que soient les valeurs x_i et y_i on a :

$$P(X = x_i \text{ et } Y = y_i) = P(X = x_i) \times P(Y = y_i)$$

I.2 Propriétés des opérations sur les variables aléatoires

Propriété 3

1. Soit X une v.a. et a un réel. Alors on a :

$$E(aX) = a E(X) ; V(aX) = a^2 V(X) ; \sigma(aX) = |a| \sigma(X)$$

2. Soit X et Y deux variables aléatoires. Alors :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

3. Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires :

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$$

4. Soit a, b des réels et X, Y des v.a.

$$E(aX + b) = a E(X) + b ; E(aX + bY) = a E(X) + b E(Y) ; V(aX + b) = a^2 V(X)$$



Preuve

On a facilement $E(aX) = a E(X)$, montrons que $V(aX) = a^2 V(X)$.

$$\begin{aligned} V(aX) &= E(a^2 X^2) - (E(aX))^2 \\ V(aX) &= a^2 E(X^2) - (aE(X))^2 \\ &= a^2 E(X^2) - a^2 E(X)^2 \\ &= a^2 (E(X^2) - E(X)^2) \\ V(aX) &= a^2 V(X) \end{aligned}$$

Propriété 4

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors on a :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

II Échantillon d'une loi de probabilité

II.1 Échantillon de taille n d'une loi de probabilité

Définition 2

Soit X une v.a. définie sur l'ensemble Ω des issues d'une expérience aléatoire.

Un échantillon de taille n de la loi de X est une liste (X_1, X_2, \dots, X_n) de variables aléatoires indépendantes et identiques suivant cette loi.



Exemple

Soit X la v.a. qui, à chaque pièce issue d'une chaîne de production, associe sa masse en gramme.

On note pour $1 \leq i \leq 10$, X_i la v.a. qui, à chaque lot de 10 pièces issue d'une chaîne de production, associe la masse en gramme de la i -ème pièce.

Les variables X_i sont indépendantes, identiques et suivent la même loi que X donc un échantillon de taille $n = 10$ de la loi de X est la liste $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$.

Définition 3 (Somme et moyenne)

1. La variable aléatoire **somme** d'un échantillon de taille n de la loi de X est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille n par :

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

2. La variable aléatoire **moyenne** d'un échantillon de taille n de la loi de X est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille n par :

$$M_n = \frac{1}{n} S_n$$



Exemple

Soit X la v.a. qui, à chaque pièce issue d'une chaîne de production, associe sa masse en gramme.

On note pour $1 \leq i \leq 10$, X_i la v.a. qui, à chaque lot de 10 pièces issue d'une chaîne de production, associe la masse en gramme de la i -ème pièce.

La variable aléatoire somme est définie par :

$$S_{10} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

et la v.a. moyenne associée à chaque lot de 10 pièces la masse moyenne en grammes

$$M_{10} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}}{10}$$

II.2 Espérance, variance et écart-type de S_n et M_n

Propriété 5 (Somme S_n)

Soit S_n la v.a. somme d'un échantillon de taille n de la v.a. X , alors :

$$E(S_n) = n E(X) \quad ; \quad V(S_n) = n V(X) \quad ; \quad \sigma(S_n) = \sqrt{n} \sigma(X)$$

Propriété 6 (Moyenne M_n)

Soit M_n la v.a. moyenne d'un échantillon de taille n de la v.a. X , alors :

$$E(M_n) = E(X) \quad ; \quad V(M_n) = \frac{1}{n} V(X) \quad ; \quad \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma(X)$$



Remarque

Puisque $V(M_n) = \frac{1}{n} V(X)$, la variance de la moyenne diminue quand la taille de l'échantillon augmente.

Cette variance quantifie la **fluctuation d'échantillonnage**, c'est à dire l'écart-moyen entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance.

II.3 Espérance et variance de la loi binomiale

Propriété 7

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi Binomiale de paramètres n et p , alors :

1. L'espérance de X vaut : $E(X) = np$;
2. La variance de X vaut : $V(X) = np(1-p)$;
3. L'écart-type de X vaut : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$.