Math93.com

Devoir Surveillé n°2

Tle Spécialité

Suites, limites et récurrences

Durée 2 heures - Coeff. 10

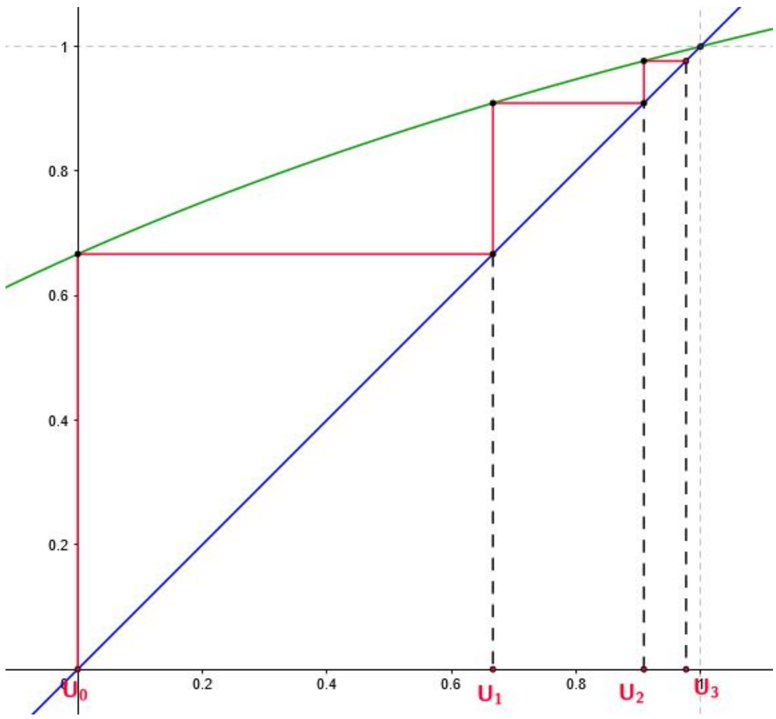
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Nom :				
BARÈME (sur 20 points)				Note
Exercice 1 (ROC)	:	1	point	
Exercice 2 (Limites)	:	6	points	
Exercice 3 (Une récurrence)	:	2.5	points	
Exercice 4 (Suite homographique)	:	10.5	points	
			Total	

Annexe de l'exercice 4 page 6 (à rendre avec la copie)



Exercice 1. ROC — 1 point

Démontrer l'une des affirmations de théorème suivant :

Théorème 1 (Suite croissante et non majorée : ROC)

1. Toute suite **croissante et non majorée** diverge vers $+\infty$.
2. Toute suite **décroissante et non minorée** diverge vers $-\infty$.

Corrigé

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.
Soit A un réel.

- La suite (u_n) n'est pas majorée par A donc il existe un entier p tel que $u_p > A$.
- La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n \geqslant p$, on a $u_n \geqslant u_p$ et donc :

$$\begin{cases} u_p > A \\ u_n \geqslant u_p \end{cases} \Longrightarrow u_n \geqslant u_p > A$$

- On vient de montrer que l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang p. Donc la suite (u_n) est divergente vers $+\infty$.

Exercice 2. Limites de suites — 6 points

Déterminer la limite des suites suivantes définies pour n entier, $n \geqslant 1$.

1. $\boldsymbol{a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(1 - \sqrt{n}\right)}$

Corrigé

D'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Donc par somme et produit :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \sqrt{n}\right) = -\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$$

2. $b_n = \dfrac{n^3 - n}{n^2 - 3n}$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$b_n = \frac{n^3 - n}{n^2 - 3n} = \frac{n^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \frac{3}{n}\right)} = \frac{n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{1 - \frac{3}{n}}$$

D'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

- Pour le numérateur : $\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 1 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} n\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$
- Pour le dénominateur : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right) = 1$
- Et donc par quotient : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty}$

3. $\boldsymbol{c_n = n - \sqrt{n}}$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$c_n = n - \sqrt{n} = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Et donc

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty}$$

4. $d_n = \sqrt{n^2 + \sin^2 n}$

Corrigé

Pour tout entier n, on a :

$$\sin^2 n \geqslant 0$$

Et la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ implique que pour tout entier naturel n :

$$n^2 + \sin^2 n \geqslant n^2 \Longrightarrow \sqrt{n^2+\sin^2 n} \geqslant \sqrt{n^2}$$

Donc pour tout entier naturel n :

$$d_n = \sqrt{n^2+\sin^2 n} > \sqrt{n^2} = |n| = n \text{ car } n \text{ positif}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par théorème de comparaison :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \\ d_n > n \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty}$$

5. $f_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{n^2 - \cos n}$

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul :

$$f_n = \frac{n^2+\cos n}{n^2-\cos n} = \frac{n^2\left(1+\dfrac{\cos n}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\dfrac{\cos n}{n^2}\right)} = \frac{1+\dfrac{\cos n}{n^2}}{1-\dfrac{\cos n}{n^2}}$$

Or pour tout entier n non nul :

$$\frac{-1}{n^2} \leqslant \frac{\cos n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc par théorème d'encadrement (ou des gendarmes) :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0 \\ \frac{-1}{n^2} \leqslant \frac{\cos n}{n} \leqslant \frac{1}{n^2} \text{ , (avec } n \geqslant 1) \end{cases} \implies \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$$

Et donc par somme et quotient :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{\cos n}{n^2} = 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{\cos n}{n^2} = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\implies} \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 + \frac{\cos n}{n^2}}{1 - \frac{\cos n}{n^2}} = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n = 1}$$

6. $g_n = \dfrac{5^n - 6^n}{6^n - 1}$

Corrigé

Pour tout entier n :

$$g_n = \frac{5^n - 6^n}{6^n - 1} = \frac{6^n \left(-1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)}{6^n \left(1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)} = \frac{-1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

Or d'après le cours sur les limite de suites géométriques de terme général q^n on a :

- puisque $-1 < \left(\frac{5}{6}\right) < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$;
- puisque $-1 < \left(\frac{1}{6}\right) < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$.

Et donc par somme et quotient :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} -1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n = -1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\implies} \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = -1}$$

Exercice 3. Récurrence **2.5 points**

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}. \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

2. Que peut-on en déduire ? *(soyez le plus précis possible)*

Corrigé

1. **[2 points]** Soit pour n entier fixé, $P(n)$ la propriété :

$$«\, 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3 \,».$$

- Initialisation (0,25) : $u_1 = 3$ et $u_2 = \sqrt{5}$.

$$1 \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant 3.$$

  donc $P(1)$ est vraie.

- Hérédité (1,5) : On suppose que pour un entier $n \geqslant 1$, $P(n)$ est vraie et on cherche à prouver que $P(n+1)$ est encore vraie.
  D'après l'hypothèse de récurrence (HR), pour n entier fixé :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3 &\Longrightarrow 2 \leqslant 2u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant 6 \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant 2u_{n+1} - 1 \leqslant 2u_n - 1 \leqslant 5 \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant \sqrt{2u_{n+1} - 1} \leqslant \sqrt{2u_n - 1} \leqslant \sqrt{5} \\ &\qquad\qquad \text{car la fonction racine est croissante sur } [1\,;\,5] \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3 \end{aligned}$$

- Conclusion (-0,25) : la propriété est vraie au rang 1 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier n.
  Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\boxed{1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3}.$$

2. **[0,5 point] Que peut-on en déduire (soyez le plus précis possible) ?**
   La suite (u_n) est minorée par 1 et décroissante donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente vers une limite $\ell \geqslant 1$. D'après l'inégalité démontrée, on a même $1 \leqslant \ell \leqslant 3$.

Exercice 4. Suite homographique — 10.5 points

On considère la fonction f définie sur $]3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+3}.$$

1. Étudier les variations de f sur $]3\,;\,+\infty[$.

   On admettra pour la suite que f est croissante sur $]3\,;\,+\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\quad f(x) \in [0\,;\,1]$.

3. Dans toute la suite du problème, on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Conjecture graphique

   3. a. Dans le repère de l'annexe 1, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur l'intervalle $[0, 1]$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.
   Construire sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n).

   3. b. Conjecturer la monotonie et la convergence de la suite (u_n).

4. Première méthode

   4. a. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   4. b. Par la méthode de votre choix, étudier la monotonie de la suite (u_n).

   4. c. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel l.

4. d. On admet que la limite l de la suite (u_n) est une solution de l'équation :

$$x = f(x).$$

Déterminer la limite l de la suite (u_n).

5. <u>Deuxième méthode</u>
On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

5. a. Démontrer rapidement que la suite (v_n) est bien définie (en clair que u_n ne peut être égal à (-2).)

5. b. Prouver que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

5. c. Exprimer v_n en fonction de n.

5. d. Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n.

On pourra admettre pour la suite que pour n entier :

$$u_n = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}$$

5. e. En déduire la limite de la suite (u_n).

6. Écrire en python un algorithme sous la forme d'une fonction qui renvoie le rang à partir duquel $u_n > 0,999$ et donner le résultat obtenu en justifiant rigoureusement votre réponse.

Fin du devoir

Question Bonus

***Bonus** : justifier en utilisant uniquement la définition d'une suite convergente, et sans calculer de valeurs, que votre algorithme va bien renvoyer une valeur, c'est à dire que votre boucle se termine (on parle de terminaison algorithmique).*

Corrigé

1. [0,5 point] f est une fonction homographique donc f est continue et dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}$:

$$f'(x) = \frac{4}{(x+3)^2} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty; -3[$ et sur $]-3; +\infty[$.

2. [0,5 point] En déduire que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$.
$[0\ ;\ 1] \subset]-3\ ;\ +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$. Par conséquent pour tout $x \in [0;1]$, on peut composer par la fonction croissante f et :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant f(0) = \frac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant f(1) = 1$$

Donc pour tout $x \in [0;1]$, $\quad f(x) \in [0;1]$.

3. Dans toute la suite du problème, on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. a. [0,5 point] Construire les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses du repère de l'annexe 2.

3. b. [0,25 point] La suite (u_n) semble croissante et converger vers 1.

4. <u>Première méthode [4,5 points]</u>.

4. a. [1,5 point] Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
Soit pour n entier $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$$« 0 \leqslant u_n \leqslant 1 ».$$

- Initialisation (0,25) : $u_0 = 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité (1) : on suppose que pour un entier $k \geqslant 0$:

$$0 \leqslant u_k \leqslant 1$$

Or d'après la question 2. pour tout

$$x \in [0;1], \quad f(x) \in [0;1]$$

Donc on peut composer par la fonction f strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$:

$$0 \leqslant u_k \leqslant 1 \Longrightarrow f(0) = \frac{2}{3} \leqslant f(u_k) = u_{k+1} \leqslant f(1) = 1$$

Soit

$$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$$

- Conclusion (-0,25) : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout entier n. On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0;1]$.

4. b. **[1,5 point]** Monotonie de la suite (u_n).

- Méthode 1 : directe
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - u_n \\ &= \frac{2u_n + 2 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} \\ &= \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 3} \\ &= \frac{(u_n + 2)(1 - u_n)}{u_n + 3}. \end{aligned}$$

$u_n \in [0;1]$ donc $1 - u_n \geqslant 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 3 > 0$. Par conséquent (u_n) est croissante.
- Méthode 2 : par récurrence (plus rapide)
Soit pour n entier $\mathscr{P}(n)$ la propriété : $u_n \leqslant u_{n+1}$.
  - Initialisation (0,25) : $u_0 = 0 \leqslant u_1 = f(0) = \dfrac{2}{3}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
  - Hérédité (1) : on suppose que pour un entier n fixé, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie et donc :

$$u_n \leqslant u_{n+1}$$

D'après la question précédente, pour tout n on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc on peut composer par la fonction f qui est croissante sur $[0\ ;\ 1]$ donc :

$$f(u_n) = u_{n+1} \leqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2}$$

Donc la propriété est vraie au rang suivant $(n+1)$, elle est héréditaire.
  - Conclusion (-0,25) : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout entier n. La suite (u_n) est donc croissante.

4. c. **[0,5 point]** La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 par conséquent elle converge vers un réel l tel que $l \leqslant 1$ et de plus (u_n) est minorée par 0 donc $0 \leqslant l \leqslant 1$.

4. d. **[1 point]** On admet que la limite l de la suite (u_n) est une solution de l'équation : $x = f(x)$. On résout :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x = \frac{2x+2}{x+3} \\ &\iff x(x+3) = 2x + 2 \text{ avec } x \neq -3 \\ &\iff x^2 + x - 2 = 0 \text{ avec } x \neq -3 \\ &\iff (x-1)(x+2) = 0 \text{ avec } x \neq -3 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -2. \end{aligned}$$

Conclusion : Comme $l \in [0;1]$ on en déduit que $l = 1$.

5. Deuxième méthode [4,25 points]

On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

5. a. [0,25 point] Démontrer rapidement que la suite (v_n) est bien définie (en clair que u_n ne peut être égal à (-2).)

La suite (v_n) est définie si pour tout entier n, $u_n \neq -2$. Or c'est bien le cas car dans la question 2.) on a montré que $u_n \in [0 ; 1]$.

5. b. [1 point] Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{\frac{2u_n+2}{u_n+3} - 1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3} + 2} \\ &= \frac{2u_n + 2 - u_n - 3}{2u_n + 2 + 2u_n + 6} \\ &= \frac{u_n - 1}{4(u_n + 2)} \\ &= \frac{1}{4} v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{2}$.

Remarque : Si α et β sont les solutions de l'équation $f(x) = x$, on définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$.

5. c. [0,25 point] Exprimer v_n en fonction de n.

La suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{2}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\boxed{v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

5. d. [0,75 point] Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} &\iff v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \quad \text{avec } u_n \neq -2 \text{ (question 5.a)} \\ &\iff v_n u_n + 2v_n - u_n = -1 \\ &\iff u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n \\ &\iff u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1} \quad \text{avec d'après 5c) } v_n \neq 1 \\ &\iff \boxed{u_n = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}}. \end{aligned}$$

5. e. [1 point] Limite de la suite (u_n).

On vient de montrer que pour n entier :

$$u_n = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}$$

Or $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 = -1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 = -1 \end{array} \right. \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

6. **[1 point] Écrire en python un algorithme sous la forme d'une fonction qui renvoie le rang à partir duquel $u_n > 0,999$ et donner le résultat obtenu en justifiant votre réponse.**
On obtient facilement :
$$\begin{cases} u_5 \approx 0,9985 < 0,999 \\ u_6 \approx 0,9996 > 0,999 \end{cases}$$
Donc puisque la suite (u_n) est croissante, l'algorithme va renvoyer $n = 6$.

```
def ex():
    '''In : pas de variable en entrée
      Out : indice n tel que U(N)>0,999'''
    u=0 # on initialise U0
    n=0   # on initialise n
    while U<=0.999:  # test de seuil
      u=(2*u+2)/(u+3) # récurrence
      n=n+1     # compteur des indices
    return n
```