Math93.com

Devoir Surveillé n°2

Tle Spécialité

Suites, limites et récurrences

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 20 points

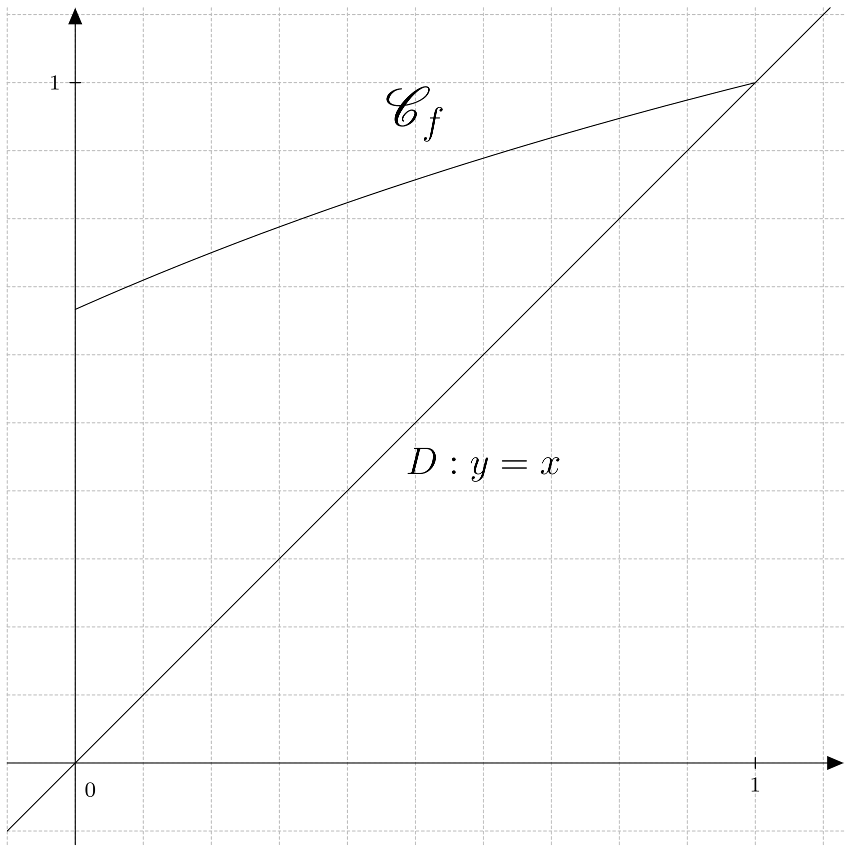
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Nom :

BARÈME (sur 20 points)	Note
Exercice 1 : 1 point	
Exercice 2 : 6 points	
Exercice 3 : 2.5 points	
Exercice 4 : 10.5 points	
Total	

Annexe de l'exercice 4 page 3 (à rendre avec la copie)



Exercice 1. ROC — 1 point

Démontrer l'une des affirmations de théorème suivant :

Théorème 1 (Suite croissante et non majorée : ROC)

1. Toute suite **croissante et non majorée** diverge vers $+\infty$.
2. Toute suite **décroissante et non minorée** diverge vers $-\infty$.

Exercice 2. Limites de suites — 6 points

Déterminer la limite des suites suivantes définies pour n entier, $n \geqslant 1$.

1. $\boldsymbol{a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(1 - \sqrt{n}\right)}$
2. $b_n = \dfrac{n^3 - n}{n^2 - 3n}$
3. $\boldsymbol{c_n = n - \sqrt{n}}$
4. $d_n = \sqrt{n^2 + \sin^2 n}$
5. $f_n = \dfrac{n^2 + \cos n}{n^2 - \cos n}$
6. $g_n = \dfrac{5^n - 6^n}{6^n - 1}$

Exercice 3. Récurrence — 2.5 points

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}. \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$
2. Que peut-on en déduire ? *(soyez le plus précis possible)*

Exercice 4. Suite homographique — 10.5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+3}.$$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

On admettra pour la suite de l'exercice que f est croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

3. Dans toute la suite du problème, on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Conjecture graphique

3. a. Dans le repère de l'annexe 1, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur l'intervalle $[0, 1]$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.
Construire sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n).

3. b. Conjecturer la monotonie et la convergence de la suite (u_n).

4. Première méthode

4. a. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

4. b. Par la méthode de votre choix, étudier la monotonie de la suite (u_n).

4. c. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel l.

4. d. On admet que la limite l de la suite (u_n) est une solution de l'équation :

$$x = f(x).$$

Déterminer la limite l de la suite (u_n).

5. Deuxième méthode

On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

5. a. Démontrer rapidement que la suite (v_n) est bien définie (en clair que u_n ne peut être égal à (-2).)

5. b. Prouver que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

5. c. Exprimer v_n en fonction de n.

5. d. Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n.

On pourra admettre pour la suite que pour n entier :

$$u_n = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}$$

5. e. En déduire la limite de la suite (u_n).

6. Écrire en python un algorithme sous la forme d'une fonction qui renvoie le rang à partir duquel $u_n > 0,999$ et donner le résultat obtenu en justifiant rigoureusement votre réponse.

Fin du devoir

Question Bonus

Bonus *: justifier en utilisant uniquement la définition d'une suite convergente, et sans calculer de valeurs, que votre algorithme va bien renvoyer une valeur, c'est à dire que votre boucle se termine (on parle de terminaison algorithmique).*