



Math93.com

Devoir Surveillé n°B1

Correction

Tle Spécialité
Fonctions
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 21 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Exercice 1. Vrai ou Faux

3 points

Pour l'affirmation ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement.
 Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ telle que :

- la fonction g est dérivable et strictement décroissante sur $[0 ; 1]$;
- On a : $g(0) = 10$ et $g(1) = 0$.

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = e^{g(x)}$$

Alors l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $[0 ; 1]$.



Corrigé

- [0.5] La fonction g est définie et dérivable sur $[0 ; 1]$ donc f l'est aussi et pour x de $[0 ; 1]$ on a :

$$f'(x) = g'(x) \times e^{g(x)}$$

- [0.5] Puisque l'exponentielle est strictement positive, on a : $e^{g(x)} > 0$ et f' est du signe de g' .
- [0.5] La fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ (et continue car dérivable) donc g' est strictement négative sur cet intervalle.

[0.5] Cela nous donne le signe de f' et donc les variations de f avec :

$$f(0) = e^{g(0)} = e^{10} \text{ et } f(1) = e^{g(1)} = e^0 = 1$$

x	0	1
Signe de $f'(x) = g'(x) \times e^{g(x)}$	-	
Variations de f	e^{10} 1	

- [1] On peut appliquer le corolaire du TVI :
 - Sur $[0 ; 1]$ f est continue car g l'est et dérivable.
 - le réel $k = 6$ est compris entre $f(0) = e^{g(0)} = e^{10}$ et $f(1) = e^{g(1)} = e^0 = 1$.

– Donc d’après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l’équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $[0 ; 1]$.

• **Conclusion : l’affirmation 1 est vraie.**

Exercice 2.

6 points

Soit \mathcal{C}_g la courbe représentative dans un repère de la fonction g définie sur $]-\infty ; 4]$ par :

$$g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-\infty ; 4]$ et dresser le tableau de variations (avec les valeurs aux bornes).
3. Déterminer l’équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d’abscisse 1.
4. Étudier la convexité de g et montrer que la courbe \mathcal{C}_g présente un point d’inflexion.
5. Dédire des questions précédentes le signe de h définie sur $]-\infty ; 4]$ par :

$$h(x) = g(x) - (3x - 2)$$



Corrigé

1. [1 pt] Déterminer la limite de g en $-\infty$.

On a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 1) = +\infty \end{cases} \xRightarrow{\text{par somme}} \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty}$$

2. [1,5 pt] Étudier les variations de la fonction g et dresser le tableau de variations (avec les valeurs aux bornes).

La fonction g est définie et dérivable sur $]-\infty ; 4]$ et pour x de cet intervalle :

$$g'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2)$$

La dérivée est une fonction polynôme du second degré dont les racines sont 0 et 2. Elle est du signe du coefficient de x^2 soit de $a = -3 < 0$ à l’extérieur des racines soit :

x	$-\infty$	0	2	4
Signe de $g'(x)$	-	0	+	-
Variations de g	$+\infty$	-1	3	-17

3. [1 pt] Déterminer l’équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d’abscisse 1.

La fonction g est dérivable sur $]-\infty ; 4]$ et $g'(x) = -3x^2 + 6x$. L’équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_g au point d’abscisse $a = 1$ est

$$(T) : y = g'(a)(x - a) + g(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\begin{cases} g(1) = +1 \\ g'(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow (T) : y = 3 \times (x - 1) + 1 \Rightarrow \boxed{y = 3x - 2}$$

4. [1 pt + (0,5 bonus)] Étudier la convexité de g et montrer que la courbe \mathcal{C}_g présente un point d’inflexion.

Pour x de $]-\infty ; 4]$ on a :

$$g'(x) = -3x^2 + 6x \text{ et } g''(x) = -6x + 6 = 6(-x + 1)$$

Donc on a facilement :

x	$-\infty$	1	4
Signe de $g''(x)$	+	0	-
Convexité de g	g convexe		g concave

La fonction g change de concavité en $x = 1$ donc la courbe \mathcal{C}_g présente un point d'inflexion au point d'abscisse 1.

5. [1] Dédurre des questions précédentes le signe de h définie sur $]-\infty ; 4]$ par : $h(x) = g(x) - (3x - 2)$.

- On remarque que h correspond à l'écart entre l'ordonnée d'un point de la courbe et d'un point de la tangente en 1 de même abscisse x .
- La courbe \mathcal{C}_g présente un point d'inflexion au point d'abscisse 1 donc elle traverse sa tangente en ce point.
- g convexe sur $]-\infty ; 1]$ donc \mathcal{C}_g est au dessus de la tangente et h est positif sur $]-\infty ; 1]$.
- g concave sur $[1 ; 4]$ donc \mathcal{C}_g est au dessous de la tangente et h est négatif sur $[1 ; 4]$.

x	$-\infty$	1	4
Signe de $h(x)$	+	0	-

Exercice 3.

12 points

Partie 1

7 points

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Montrer que pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$ on a :

$$g'(x) = -x e^x$$

Étudier les variations de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$.



Corrigé (1 pt + 0,5 bonus)

- La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$ est dérivable et sur $[0 ; +\infty[$:

$$g'(x) = e^x - e^x - xe^x \implies \boxed{g'(x) = -xe^x}$$

- Comme $e^x > 0$ et $x \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$, on a $g'(x) \leq 0$ sur $[0 ; +\infty[$.
- Donc g est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.



Corrigé (1 pt)

Pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$ on a :

$$g(x) = e^x (1 - x) + 1$$

Et

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty \end{cases} \implies \text{par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (1 - x) = -\infty$$

Et donc par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (1 - x) + 1 = -\infty \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty}$$

3. Donner le tableau de variations de g .



Corrigé (0.5 pt)

x	0	$+\infty$
Variations de g	2	$-\infty$

↘

4.

4. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.



Corrigé (1 pt)

x	0	α	$+\infty$
Variations de g	2	0	$-\infty$

↘

- Application du corollaire sur $[0; +\infty[$:
 - La fonction g est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[0; +\infty[$;
 - Le réel $k = 0$ est compris entre $g(0) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
 - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

4. b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .



Corrigé (1 pt)

Pour avoir un encadrement de α , on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(1,27) \approx 0,04 < 0 \\ g(1,28) \approx -0,007 > 0 \end{array} \right. , \text{ donc } \boxed{1,27 < \alpha < 1,28}$$

4. c. Recopier sur votre copie les lignes manquantes 8, 10 et 12 afin que cette fonction Python renvoie un encadrement de α au centième (comme dans la question précédente) si on écrit *dichotomie(a, b)* dans la console, avec a et b bien choisis.

Préciser les valeurs de a et b que l'on peut prendre pour appeler la fonction, c'est à dire que peut-on écrire dans la console pour obtenir un encadrement de α .

```

1 from math import exp
2
3 def g(x):
4     return exp(x) - x * exp(x) + 1
5
6 def dichotomie(a, b):
7     while (b - a > 0.01):
8         m = ...
9         if g(m) * g(a) > 0:
10            ...
11        else:
12            ...
13    return (a, b)

```



Corrigé (1,5 pt)

- Ligne 8 : $m = (a + b)/2$
- Ligne 10 : $a = m$
- Ligne 12 : $b = m$
- Il faut choisir a et b bornes d'un intervalle contenant α , par exemple $[0 ; 2]$ car $g(2) = 1 - e^2 \approx -6.4 < 0$.

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .



Corrigé (0.5 pt)

On utilise les variations de g :

x	0	α	$+\infty$
Variations de g	2	0	$-\infty$

Diagram description: A table with two rows. The first row is labeled 'x' and has columns for 0, alpha, and +infinity. The second row is labeled 'Variations de g' and has columns for 2, 0, and -infinity. A vertical dashed line is drawn at x = alpha. A downward arrow points from alpha to 0. A diagonal arrow points from the '2' in the first column to the '-infinity' in the third column.

On a donc :

x	0	α	$+\infty$
Signe de $g(x)$	+	0	-

Partie 2

5 points

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ telle que $f(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1. Attention, utilisez le résultat ci-contre, pas de calculs nécessaires.



Corrigé (1 pt)

- Non demandé (on pouvait directement utiliser le résultat).
La fonction f quotient de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$ et le dénominateur ne s'annulant pas, elle est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{4(e^x + 1) - 4x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{4(e^x - xe^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

- On remarque que pour tout réel x de $[0; +\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

- Comme $(e^x + 1)^2 > 0$ quel que soit x , le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

2. En déduire les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.



Corrigé (1 pt)

On vient de montrer que f' est du signe de g donc d'après la question 5 de la partie 1 on a :

x	0	α	$+\infty$
Signe de $g(x)$	+	0	-

Donc f est croissante sur $[0; \alpha[$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$, $f(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

3. Démontrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.



Corrigé (1 pt)

On a :

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\iff e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0 \\ &\iff e^\alpha(1 - \alpha) = -1 \\ &\iff e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1} \end{aligned}$$

4. En déduire que $f(\alpha) = 4(\alpha - 1)$.



Corrigé (1 pt)

On a montré dans la partie 1 que : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$ donc :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{4\alpha}{e^\alpha + 1} \\ &= \frac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} \\ &= \frac{4\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} \\ &= 4\alpha \times \frac{\alpha - 1}{\alpha} \\ f(\alpha) &= 4(\alpha - 1) \end{aligned}$$

5. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.



Corrigé (1 pt)

On a montré que :

$$\begin{cases} f(\alpha) = 4(\alpha - 1) \\ 1,27 < \alpha < 1,28 \end{cases}$$

- Méthode 1 : on introduit une nouvelle fonction

La fonction affine $x \mapsto 4(x - 1)$ est strictement croissante sur \mathbb{R} donc (l'ordre ne change pas) :

$$\begin{cases} f(\alpha) = 4(\alpha - 1) \\ 1,27 < \alpha < 1,28 \end{cases} \implies 4(1,27 - 1) < f(\alpha) < 4(1,28 - 1)$$

Soit

$$\boxed{1,08 < f(\alpha) < 1,12}$$

- Méthode 2 : par encadrements successifs (comme en seconde)

$$\begin{aligned} 1,27 < \alpha < 1,28 &\iff 1,27 - 1 < \alpha - 1 < 1,28 - 1 \\ &\iff 0,27 < \alpha - 1 < 0,281 \\ &\iff 4 \times 0,27 < \underbrace{4 \times (\alpha - 1)}_{f(\alpha)} < 4 \times 0,281 \\ &\iff \boxed{1,08 < f(\alpha) < 1,12} \end{aligned}$$

- Remarque : la méthode 2 n'est pas toujours faisable. La première est souvent plus rapide.

↪ **Fin du devoir** ↩