Math93.com

Devoir Surveillé n°B1
Tle Spécialité
Fonctions
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 21 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Exercice 1. Vrai ou Faux — 3 points

Pour l'affirmation ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ telle que :

- la fonction g est dérivable et strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$;
- On a : $g(0) = 10$ et $g(1) = 0$.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\,g(x)}$$

Alors l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 1]$.

Exercice 2. — 6 points

Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative dans un repère de la fonction g définie sur $]-\infty\ ;\ 4]$ par :

$$g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-\infty\ ;\ 4]$ et dresser le tableau de variations (avec les valeurs aux bornes).
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.
4. Étudier la convexité de g et montrer que la courbe $\mathscr{C}_g$ présente un point d'inflexion.
5. Déduire des questions précédentes le signe de h définie sur $]-\infty\ ;\ 4]$ par :

$$h(x) = g(x) - (3x - 2)$$

Exercice 3. 12 points

Partie 1 7 points

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Montrer que pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$ on a :

$$g'(x) = -x\ \mathrm{e}^{\,x}$$

Étudier les variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3. Donner le tableau de variations de g.

4.

4. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

4. b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

4. c. Recopier sur votre copie les lignes manquantes 8, 10 et 12 afin que cette fonction Python renvoie un encadrement de α au centième (comme dans la question précédente) si on écrit $\textit{dichotomie}(a, b)$ dans la console, avec a et b bien choisis.

Préciser les valeurs de a et b que l'on peut prendre pour appeler la fonction, c'est à dire que peut-on écrire dans la console pour obtenir un encadrement de α.

```python
1  from math import exp
2  
3  def g(x):
4      return exp(x)-x*exp(x)+1
5  
6  def dichotomie(a,b):
7      while (b-a>0.01):
8          m=...
9          if g(m)*g(a)>0:
10             ...
11         else:
12             ...
13     return(a,b)
```

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2 5 points

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $f(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

Un logiciel de calcul formel nous donne le résultat suivant, que vous pouvez utiliser sans justification.

$\mathrm{f(x)} = \dfrac{4\,\mathrm{x}}{\mathrm{e^x} + 1}$

$\mathrm{f_1'(x)} = \text{Dérivée(f)}$

$\rightarrow \dfrac{-4\ \mathrm{x}\ \mathrm{e^x} + 4\ \mathrm{e^x} + 4}{(\mathrm{e^x})^2 + 2\ \mathrm{e^x} + 1}$

$\mathrm{g(x)} = \text{Factoriser(f}'\text{(x))}$

$\rightarrow -4 \cdot \dfrac{\mathrm{x}\ \mathrm{e^x} - \mathrm{e^x} - 1}{(\mathrm{e^x} + 1)^2}$

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1. Attention, utilisez le résultat ci-contre, pas de calculs nécessaires.

2. En déduire les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

4. En déduire que $f(\alpha) = 4(\alpha - 1)$.

5. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Fin du devoir