



Math93.com

# Devoir Surveillé n°B2

## Correction

### Tle Spécialité

#### Bilan 1

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

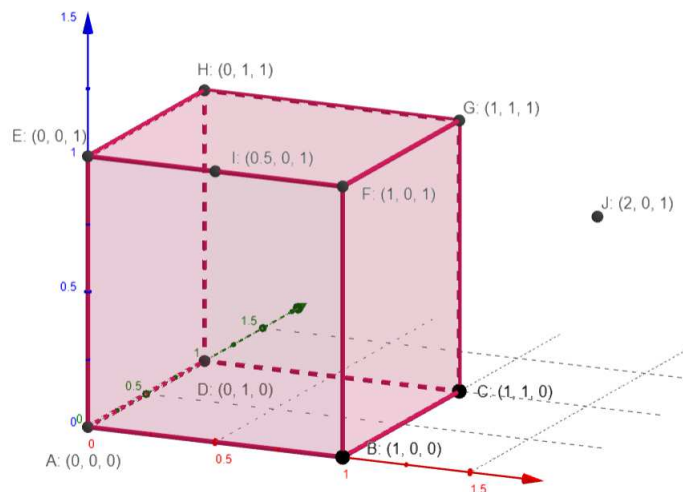


Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés.  
La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

L'utilisation des **fiches de cours** est exceptionnellement autorisée pour ce devoir de Noël sous réserve qu'elles soient **MANUSCRITES ET** dans un **PORTE-VUES**

### Exercice 1. Espace

7 points



<https://www.geogebra.org/classic/jkhq2nvb>

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.

1.

1. a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.



#### Corrigé (0.25 point)

Dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$  on a :

$$I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right); J(2; 0; 1)$$

1. b. En déduire les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{DJ}$ ,  $\overrightarrow{BI}$  et  $\overrightarrow{BG}$ .



### Corrigé (0.75 point)

$$\begin{cases} B(1; 0; 0) \\ D(0; 1; 0) \\ I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \\ J(2; 0; 1) \\ G(1; 1; 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. c. Montrer que  $\overrightarrow{DJ}$  est un vecteur normal au plan (BGI).



### Corrigé (1 point)

On a :

$$\overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 1 = 0 \text{ et } \overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 - 1 + 1 = 0$$

Donc le vecteur  $\overrightarrow{DJ}$  est orthogonal à deux vecteurs  $\overrightarrow{BI}$  et  $\overrightarrow{BG}$  du plan (BGI) qui sont non colinéaires.  
De ce fait  $\overrightarrow{DJ}$  est un vecteur normal au plan (BGI).

1. d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est  $2x - y + z - 2 = 0$ .



### Corrigé (1 point)

#### Propriété 1

Soit vecteur  $\vec{u}$  non nul et un point B de l'espace. L'unique plan  $\mathcal{P}$  passant par B et de vecteur normal  $\vec{n}$  est l'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$ .

Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \\ z - z_B \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$$

Donc d'après la propriété 1 :

$$M(x; y; z) \in (BGI) \iff \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \\ z - 0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$M(x; y; z) \in (BGI) \iff 2(x - 1) - (y - 0) + (z - 0) = 0$$

$$M(x; y; z) \in (BGI) \iff 2x - y + z - 2 = 0$$

$$\boxed{(BGI) : 2x - y + z - 2 = 0}$$

2. On note (d) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).



### Corrigé (1 point)

La droite  $(d)$  est orthogonale au plan  $(BGI)$  donc un vecteur directeur de  $(d)$  est le vecteur  $\overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , normal au plan  $(BCD)$ . La droite passant par le point  $F(1; 0; 1)$  est alors l'ensemble des points  $M$  tels que le vecteur  $\overrightarrow{FM}$  soit colinéaire à  $\overrightarrow{DJ}$ . On a alors :

$$(d) = \left\{ M(x; y; z); \overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = t \overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  est donc :

$$(d) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2. b. On considère le point  $L$  de coordonnées  $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$ .

Montrer que  $L$  est le point d'intersection de la droite  $(d)$  et du plan  $(BGI)$ .



### Corrigé (1 point)

- Méthode 1 : on peut vérifier que les coordonnées du point  $L$  vérifient les équations de la droite et du plan.
- Méthode 2 : on va retrouver ce résultat on résolvant un système composé des équations de la droite et du plan :

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in (d) \cap (BGI) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \\ z = t + 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \\ z = t + 1 \\ 2(2t + 1) - (-t) + (t + 1) = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \\ z = t + 1 \\ 6t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}; y = \frac{1}{6}; z = \frac{5}{6} \\ t = -\frac{1}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

$L\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$  est le point d'intersection de la droite  $(d)$  et du plan  $(BGI)$ .

3. On rappelle que le volume  $\mathcal{V}$  d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où  $\mathcal{B}$  est l'aire d'une base et  $h$  la hauteur associée à cette base.

3. a. Calculer le volume de la pyramide FBGI.

**Corrigé (1 point)**

On peut considérer :

- que la pyramide FBGI est de base (FIG) un triangle rectangle en F dont les côtés perpendiculaires sont de mesure  $FI = 0,5$  et  $FG = 1$  et de hauteur  $FB = 1$ . Donc puisque l'aire de la base est  $1/4$  (u.a.) on obtient :
 
$$V = \frac{1/4 \times 1}{3} = \frac{1}{12} \text{ u.v}$$
- ou que la pyramide FBGI est de base (FGB) un triangle rectangle en F dont les côtés perpendiculaires sont de mesure  $FB = 1$  et  $FG = 1$  et de hauteur  $FI = 0,5$ . Donc puisque l'aire de la base est  $1/2$  (u.a.) on obtient :
 
$$V = \frac{1/2 \times 1/2}{3} = \frac{1}{12} \text{ u.v}$$
- ou que la pyramide FBGI est de base (FIB) un triangle rectangle en F dont les côtés perpendiculaires sont de mesure  $FB = 1$  et  $FI = 0,5$  et de hauteur  $FG = 1$ . Donc puisque l'aire de la base est  $1/4$  (u.a.) on obtient :
 
$$V = \frac{1/4 \times 1}{3} = \frac{1}{12} \text{ u.v}$$

3. b. En déduire l'aire du triangle BGI.

**Corrigé (1 point)**

La pyramide FBGI est aussi de base (BGI) et de hauteur  $FL$ .

$$\begin{cases} L \left( \frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6} \right) \\ F(1; 0; 1) \end{cases} \implies FL = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Or on a calculé le volume de la pyramide ( $1/12$ ) lors de la question précédente obtient donc :

$$V = \frac{\mathcal{A}(BGI) \times FL}{3} = \frac{1}{12} \iff \mathcal{A}(BGI) \times \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{4} \implies \mathcal{A}(BGI) = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ u.a.}$$

**Exercice 2. Suites et fonctions****13 points**

Les parties A et B peuvent être abordées de façon indépendante.

Deux groupes de chercheurs étudient l'évolution d'une population de ragondins autour d'un lac.

**Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution**

Le premier groupe de chercheurs étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de ragondins autour du lac. Ce taux dépend notamment du nombre de ragondins présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9; cela signifie que 90% des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite  $(T_n)$  qui, à tout entier naturel  $n$ , associe le taux de disponibilité des ressources  $n$  années après 2018. On a ainsi  $T_0 = 0,9$ . Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$T_{n+1} = T_n - 0,1 T_n^2$$

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle? Pourquoi?

**Corrigé (1 point)**

On a :

- $T_0 = 0,9$ ,
- puis  $T_1 = T_0 - 0,1 T_0^2 = 0,9 - 0,1 \times 0,81 = 0,9 - 0,081 = 0,819$ ;
- $T_2 = T_1 - 0,1 \times T_1^2 = 0,751924 \approx 0,752$ ;
- $T_3 = T_2 - 0,1 \times T_2^2 \approx 0,695$
- et enfin  $T_4 = T_3 - 0,1 \times T_3^2 \approx 0,647$ .

Donc l'estimation de 0,4 est loin du modèle.

2. On définit la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$f(x) = x - 0,1x^2$$

Ainsi, la suite  $(T_n)$  vérifie pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_{n+1} = f(T_n)$ .

2. a. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

**Corrigé (1 point)**

La fonction polynôme  $f$  est dérivable sur  $[0; 1]$  et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 1 - 2 \times 0,1x = 1 - 0,2x$$

Or sur  $\mathbb{R}$  on a :

$$\begin{cases} 1 - 0,2x = 0 & \iff x = 5 \\ 1 - 0,2x > 0 & \iff x < 5 \end{cases} \implies 1 - 0,2x < 0 \iff x > 5$$

Ce qui montre que  $f'(x) > 0$  sur  $[0; 1]$  : la fonction  $f$  est donc croissante sur  $[0; 1]$  de  $f(0) = 0$  à  $f(1) = 1 - 0,1 = 0,9$ .

$x$	0	1
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de $f$		

2. b. Montrer que pour tout  $n$  entier naturel, on a :

$$0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$$



### Corrigé (2 points)

Soit pour  $n$  entier fixé,  $P(n)$  la propriété :

$$\ll 0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1 \gg.$$

- Initialisation : on a vu que :

$$0 < T_1 = 0,819 < T_0 = 0,9 < 1$$

L'encadrement est vrai au rang 0 ; donc  $P(0)$  est vraie.

- Hérédité : On suppose que pour un entier  $n \geq 1$ ,  $P(n)$  est vraie et on cherche à prouver que  $P(n+1)$  est encore vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence (HR), pour  $n$  entier fixé :

$$0 < T_{n+1} < T_n < 1$$

Par croissance de la fonction  $f$  sur  $[0 ; 1]$  on a :

$$f(0) < f(T_{n+1}) < f(T_n) < f(1)$$

Soit

$$0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 0,9$$

On a donc  $0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 1$  : l'encadrement est vrai au rang  $n+1$ .

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 1 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier  $n$ .  
Pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\boxed{0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1}.$$

2. c. La suite  $(T_n)$  est-elle convergente ? Justifier la réponse.



### Corrigé (0.5 point)

La suite  $(T_n)$  est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite  $\ell \geq 0$  d'après le théorème de convergence monotone.

2. d. Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.

Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?



### Corrigé (1 point)

Pour  $n$  entier, la suite  $(T_n)$  associe le taux de disponibilité des ressources  $n$  années après 2018.

La calculatrice donne :

$$\begin{cases} T_{13} \approx 0.40084 > 0,4 \\ T_{14} \approx 0,385 < 0,4 \end{cases}$$

On a montré que la suite  $(T_n)$  était décroissante, donc le taux de disponibilité des ressources devient inférieur à 0,4 après  $n = 14$  année soit en 2032 (car  $2018 + 14 = 2032$ ) ou au cours de l'année précédente soit en 2031.



### Remarque

Il nous manque de la précision dans les données pour savoir si ce passage se fait au cours de l'année 2031 ou en 2032 car on ne sait pas à partir de quel mois la donnée du taux est valable.

3. On propose un algorithme écrit en Python permettant de répondre à la question (A.2.d). La fonction `recherche()` renvoie la première année où le taux de disponibilité des ressources est inférieur à 0,4. Compléter sur cette feuille les lignes manquantes.

#### A compléter sur cette feuille

```

1  def f(x) :
2      return x-0.1*x**2
3
4  def recherche() :
5      '''renvoie la première année où le taux de
6         disponibilité des ressources est inférieur à 0.4'''
7      T = ...
8      annee = ...
9      while .....:
10         annee = ...
11         T = ...
12     return annee

```



#### Corrigé (1 point : -0.25 / mauvaise réponse)

- $T = 0.9$
- $annee = 2018$
- $while T \geq 0.4 :$
- $annee = annee + 1$
- $T = f(T)$

## Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le second groupe de chercheurs a choisi une autre option et travaille sur le nombre de ragondins peuplant le lac. Au 1<sup>er</sup> janvier 2018, il avait été dénombré 250 ragondins.

Les biologistes estiment que le nombre de ragondins présentes autour du lac peut être modélisé par la fonction  $P$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$P(t) = \frac{1000}{0,4 + 3,6e^{-0,5t}}$$

où  $t$  est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer  $P'(t)$  où  $P'$  est la fonction dérivée de  $P$  puis étudier le signe de  $P'(t)$  pour  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .



### Corrigé (1.5 point)

Sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , la fonction  $P$  quotient de fonctions dérivables et de dénominateur strictement positif, est dérivable. Elle est de la forme  $k/v$  donc de dérivée  $-k.v'/v^2$ , et sur cet intervalle :

$$P'(t) = -\frac{-0,5 \times 3,6e^{-0,5t} \times 1000}{(0,4 + 3,6e^{-0,5t})^2} = \frac{1800e^{-0,5t}}{(0,4 + 3,6e^{-0,5t})^2}$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , a fortiori sur  $[0 ; +\infty[$  donc  $P'(t)$  est un quotient de nombres supérieurs à zéro, on a donc  $P'(t) > 0$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

2. Déterminer la limite de la fonction  $P$  en  $+\infty$  puis dresser le tableau de variation de la fonction  $P$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .



### Corrigé (1.5 points)

- Limite.

on cherche la limite en  $+\infty$  de

$$t \mapsto P(t) = \frac{1000}{0,4 + 3,6e^{-0,5t}}$$

On a par composition de limites :

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} -0,5t = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases} \implies \text{par composition } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,5t} = 0$$

donc par somme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 0,4 + 3,6e^{-0,5t} = 0,4$$

et enfin par quotient de limites :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{1000}{0,4} = 2500$$

La courbe représentative de  $P$  présente donc une asymptote horizontale d'équation  $y = 2500$  en  $+\infty$ .

- Variations.

$P'(t)$  est un quotient de nombres supérieurs à zéro, on a donc  $P'(t) > 0$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

La fonction  $P$  est donc croissante sur  $[0 ; +\infty[$  de

$$P(0) = \frac{1000}{0,4 + 3,6} = \frac{1000}{4} = 250$$

à

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 2500$$

La fonction  $P$  est strictement croissante, continue car dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  de 250 à 2500

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
Signe de $P'(x)$		+	
Variations de $P$	250	2000	2500

3. Montrer qu'il existe une unique valeur  $t_0 \in [0 ; +\infty[$  telle que  $P(t_0) = 2000$ . Déterminer cette valeur à  $10^{-1}$  près.



### Corrigé (1.5 point)

- Application du corollaire sur  $[0 ; +\infty[$  :
  - La fonction  $P$  est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  ;
  - Le réel  $k = 2\,000$  est compris entre  $P(0) = 250$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 2\,500$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation  $P(t) = 2\,000$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
  - Valeur approchée .
  - Pour avoir un encadrement de  $\alpha$ , on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de  $\Delta = 0.1$  on obtient :
 
$$\left\{ \begin{array}{l} P(7,1) \approx 1\,987 < 2\,000 \\ P(7,2) \approx 2\,007 > 2\,000 \end{array} \right\}, \text{ donc } 7,1 < \alpha < 7,2.$$
- Une valeur approchée de  $\alpha$  à 0.1 près est donc  $\alpha \approx 7,1$ .

4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population du lac aura dépassé pour la première fois les 2000 ragondins.

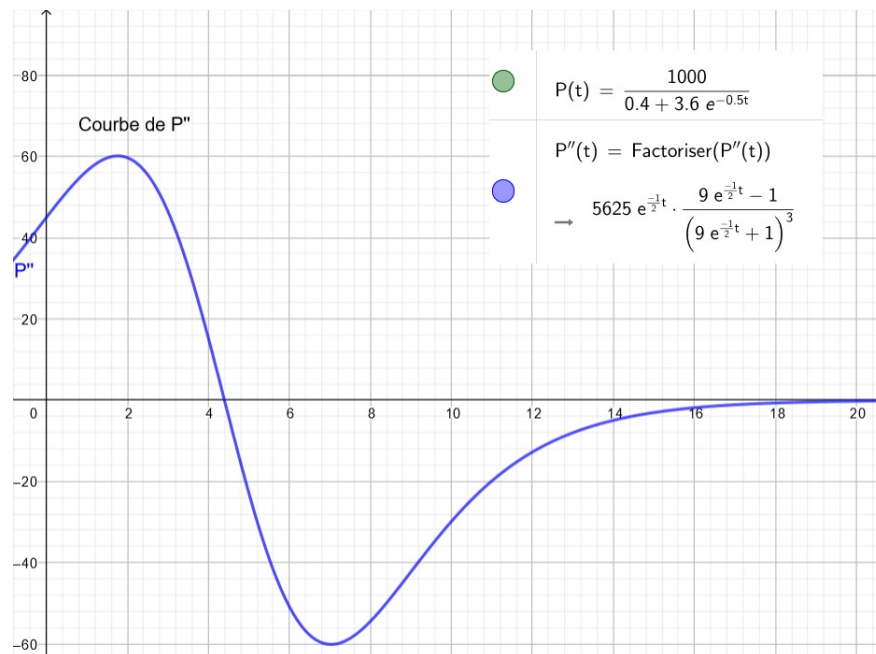


### Corrigé (0.5 point)

On a trouvé à la question précédente qu'au bout d'un temps  $t_0$  compris entre 7,1 et 7,2 années la population aura atteint les 2 000 individus, donc c'est au cours de l'année 2025 (car  $2018 + 7 = 2025$ ).

t	année	$P(t)$
0	1 <sup>er</sup> janvier 2018	250
...	...	...
7	1 <sup>er</sup> janvier 2025	$P(7) \approx 1\,965 < 2\,000$
8	1 <sup>er</sup> janvier 2026	$P(8) \approx 2\,146 > 2\,000$

5. Un logiciel de calcul formel permet de calculer la dérivée seconde  $P''$  et de tracer la courbe représentative de cette fonction  $P''$  sur  $[0 ; +\infty[$ .



5. a. Étudier graphiquement la convexité de la fonction  $P$  sur  $[0 ; +\infty[$  (aucun calcul n'est demandé).



### Corrigé (1 point)

Par lecture graphique on obtient le signe de la dérivée seconde et donc la convexité de la fonction :

$x$	0	$\approx 4,3$	$+\infty$
Signe de $P''(x)$	+	0	-
Convexité de $P$	$P$ convexe		$P$ concave

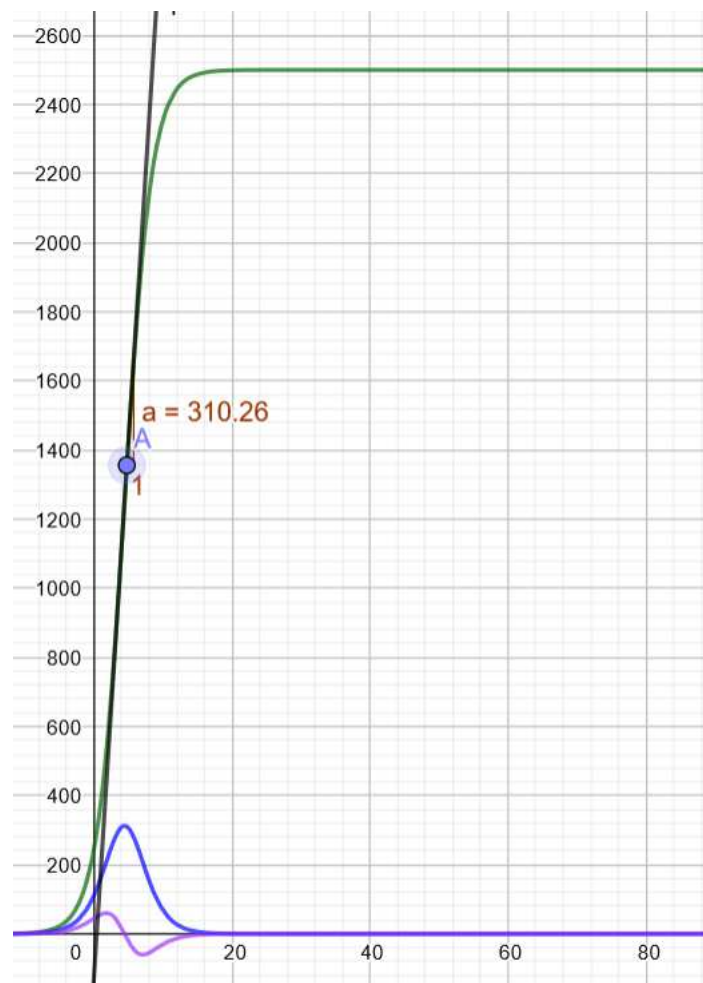
La courbe présente un point d'inflexion au point d'abscisse  $x \approx 4,3$ .

5. b. Que peut-on en déduire sur l'évolution de la population ?



### Corrigé (0.5 point)

La dérivée seconde traduit l'accélération de l'évolution. La population croît de façon continue mais de plus en plus fortement avant l'année  $2018 + 4,3 = 2022,3$  et de moins en moins rapidement après. On peut le vérifier graphiquement en observant les coefficients directeurs des tangentes à la courbe avec un logiciel de géométrie dynamique : <https://www.geogebra.org/classic/hkcqackp>



↔ Fin du devoir ↔