Math93.com

Devoir Surveillé n°B2

Tle Spécialité

Bilan 1

Durée 2 heures - Coeff. 10

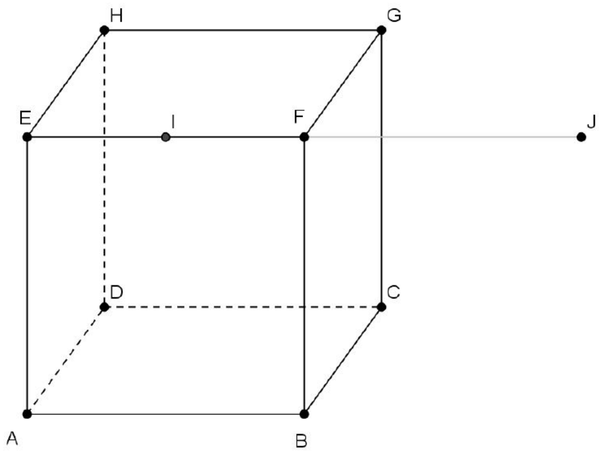
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

L'utilisation des ***fiches de cours*** *est exceptionnellement autorisé pour ce devoir de Noël sous réserve qu'elles soient MANUSCRITES ET dans un PORTE-VUES*

Exercice 1. Espace — 7 points



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.

1.

1. a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.

1. b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.

1. c. Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

1. d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

2. On note (d) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

2. b. On considère le point L de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{5}{6}\right)$.
Montrer que L est le point d'intersection de la droite (d) et du plan (BGI).

3. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

3. a. Calculer le volume de la pyramide FBGI.

3. b. En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 2. Suites et fonctions — 13 points

Les parties A et B peuvent être abordées de façon indépendante.

Deux groupes de chercheurs étudient l'évolution d'une population de ragondins autour d'un lac.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le premier groupe de chercheurs étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de ragondins autour du lac. Ce taux dépend notamment du nombre de ragondins présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.
Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à $0,9$; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.
On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0,9$. Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a :

$$T_{n+1} = T_n - 0,1\,T_n^2$$

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de $0,4$. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = x - 0,1x^2$$

Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = f(T_n)$.

2. a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

2. b. Montrer que pour tout n entier naturel, on a :

$$0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$$

2. c. La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

2. d. Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à $0,4$ au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.
Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

3. On propose un algorithme écrit en Python permettant de répondre à la question (A.2.d). La fonction *recherche*() renvoie la première année où le taux de disponibilité des ressources est inférieur à $0,4$. Compléter sur cette feuille les lignes manquantes.

A compléter sur cette feuille

```python
def f(x):
        return x-0.1*x**2

def recherche():
    '''renvoie la première année où le taux de
     disponibilité des ressources est inférieur à 0.4'''
    T =...
    annee = ...
    while ......................:
        annee =...
        T = ...
    return annee
```

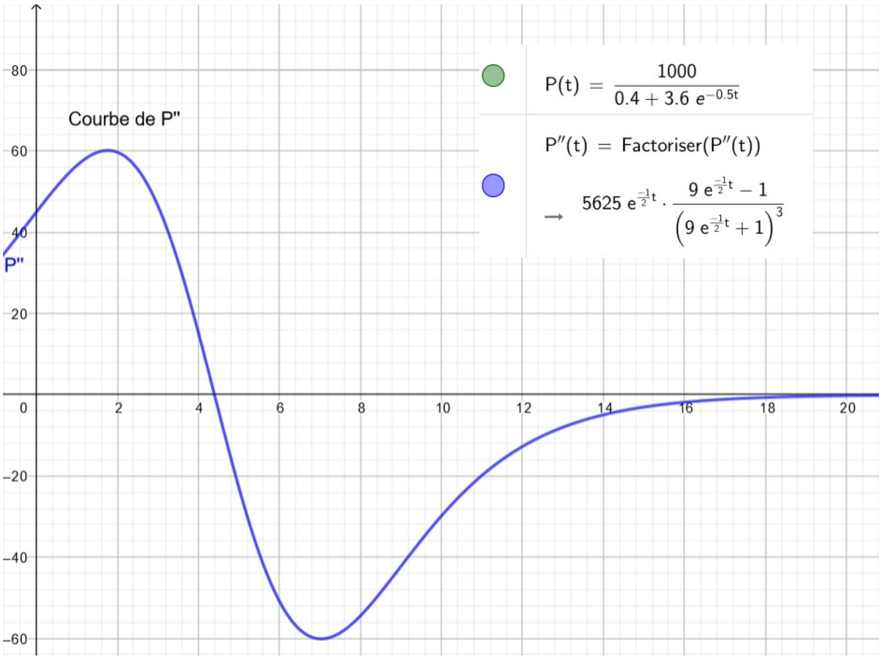
Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le second groupe de chercheurs a choisi une autre option et travaille sur le nombre de ragondins peuplant le lac. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 ragondins.
Les biologistes estiment que le nombre de ragondins présentes autour du lac peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$P(t) = \frac{1\,000}{0,4 + 3,6\,\mathrm{e}^{-0,5t}}$$

où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\,;\,+\infty[$ telle que $P(t_0) = 2\,000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population du lac aura dépassé pour la première fois les 2000 ragondins.
5. Un logiciel de calcul formel permet de calculer la dérivée seconde P'' et de tracer la courbe représentative de cette fonction P'' sur $[0\,;\,+\infty[$.



5. a. Étudier <u>graphiquement</u> la convexité de la fonction P sur $[0\,;\,+\infty[$ (aucun calcul n'est demandé).

5. b. Que peut-on en déduire sur l'évolution de la population ?

Fin du devoir