



Math93.com

Devoir Surveillé n°B2 Bis

Correction

Tle Spécialité

Bilan 1

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.



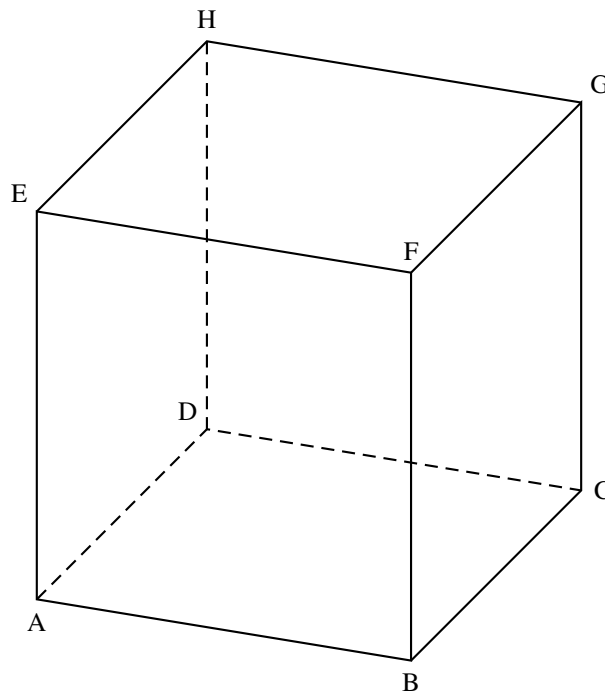
Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés.
La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

L'utilisation des **fiches de cours** est exceptionnellement autorisée pour ce devoir de Noël sous réserve qu'elles soient **MANUSCRITES ET** dans un **PORTE-VUES**

Exercice 1. Espace

6 points

Soit ABCDEFGH un cube. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Pour tout réel t , on considère le point M de coordonnées $(1 - t ; t ; t)$.

1. Montrer que pour tout réel t , le point M appartient à la droite (BH) .

Le point B a pour coordonnées $(1 ; 0 ; 0)$, et comme $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, le point H a pour coordonnées $(0 ; 1 ; 1)$.

Le vecteur \overrightarrow{BM} a pour coordonnées $(1 - t - 1 ; t - 0 ; t - 0)$ soit $(-t ; t ; t)$.

Le vecteur \overrightarrow{BH} a pour coordonnées $(0 - 1 ; 1 - 0 ; 1 - 0)$ soit $(-1 ; 1 ; 1)$.

On a donc $\overrightarrow{BM} = t \overrightarrow{BH}$, donc les vecteurs \overrightarrow{BM} et \overrightarrow{BH} sont colinéaires, ce qui prouve que le point M appartient à la droite (BH) pour tout réel t .

On admet que les droites (BH) et (FC) ont respectivement pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

2. On va démontrer que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales et non coplanaires.

- D'après sa représentation paramétrique, la droite (BH) est dirigée par le vecteur \vec{n} de coordonnées $(-1 ; 1 ; 1)$.
D'après sa représentation paramétrique, la droite (FC) est dirigée par le vecteur \vec{n}' de coordonnées $(0 ; 1 ; -1)$.

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = (-1) \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$$

donc $\vec{n} \perp \vec{n}'$ On en déduit que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales.

- Si les droites les droites (BH) et (FC) sont coplanaires, comme elles sont orthogonales, elles seront sécantes ; il suffit donc de prouver que les droites (BH) et (FC) ne sont pas sécantes pour démontrer qu'elles ne sont pas coplanaires.

Les droites (BH) et (FC) sont sécantes si on peut trouver t et t' tels que :

$$\begin{cases} 1 - t = 1 \\ t = t' \\ t = 1 - t' \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les droites (BH) et (FC) ne sont pas sécantes, donc elles ne sont pas coplanaires.

3. Pour tout réel t' , on considère le point $M'(1; t'; 1 - t')$.

3. a. Montrer que pour tous réels t et t' , $MM'^2 = 3(t - \frac{1}{3})^2 + 2(t' - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}$.

- D'une part on a :

$$\begin{aligned} MM'^2 &= (1 - 1 + t)^2 + (t' - t)^2 + (1 - t' - t)^2 \\ &= t^2 + t'^2 - 2tt' + t^2 + 1 - t' - t - t' + t'^2 + tt' - t + tt' + t^2 \\ &= 3t^2 + 2t'^2 - 2t' - 2t + 1 \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t' - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} &= 3\left(t^2 - \frac{2t}{3} + \frac{1}{9}\right) + 2\left(t'^2 - \frac{2t'}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6} \\ &= 3t^2 - 2t + \frac{1}{3} + 2t'^2 - 2t' + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ &= 3t^2 + 2t'^2 - 2t' - 2t + 1 \\ &= MM'^2 \end{aligned}$$

3. b. Pour quelles valeurs de t et de t' la distance MM' est-elle minimale ? Justifier.

- La distance MM' est minimale quand MM'^2 est minimale puisque la fonction carrée est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .
- MM'^2 est la somme de trois nombres positifs ou nuls, et sera minimale quand chacun de ces nombres est minimal.
 - $3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2$ est minimale et vaut 0 pour $t = \frac{1}{3}$;
 - $2\left(t' - \frac{1}{2}\right)^2$ est minimale et vaut 0 pour $t' = \frac{1}{2}$.
- Donc MM' est minimale pour $t = \frac{1}{3}$ et $t' = \frac{1}{2}$; dans ce cas $MM' = \sqrt{\frac{1}{6}}$.

3. c. On nomme P le point de coordonnées $(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$ et Q celui de coordonnées $(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$.

Justifier que la droite (PQ) est perpendiculaire aux deux droites (BH) et (FC).

- Le point P appartient à la droite (BH) pour $t = \frac{1}{3}$, donc (BP) = (BH).
- Le point Q appartient à la droite (FC) pour $t' = \frac{1}{2}$, donc (QC) = (FC).
- On a :

$$\vec{PQ} \cdot \vec{BP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = 0$$

donc $\vec{BP} \perp \vec{PQ}$ donc la droite (PQ) est perpendiculaire à la droite (BP) donc à la droite (BH).

- $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ donc C a pour coordonnées $(1 ; 1 ; 0)$.

• On a :

$$\overrightarrow{QC} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = 0 \times \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{6}\right) = 0 + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$$

donc $\overrightarrow{QC} \perp \overrightarrow{PQ}$ donc la droite (PQ) est perpendiculaire à la droite (QC) donc à la droite (FC).

Donc la droite (PQ) est perpendiculaire aux deux droites (BH) et (FC).

Exercice 2. Fonctions

7 points

Partie A

La fonction g est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = 1 - e^{-x}$.

1. [1 point]

Par composition on a :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

et par somme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1 \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1}$$

2. [1 point]

Sur \mathbb{R}_+ , g est dérivable et $g(x) = 1 - e^{-x}$ donc

$$g'(x) = e^{-x}$$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $g'(x) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

La fonction g est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
g	0	1

3. [1 point]

Sur \mathbb{R}_+ , g' est dérivable et

$$g''(x) = -e^{-x}$$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $g''(x) < 0$ sur $[0 ; +\infty[$. La fonction g est donc concave sur \mathbb{R}_+ .

Partie B

1.

1. a. [1.5 point]

$$f(x) = (x - 1)e^{-kx} + 1.$$

$$u(x) = x - 1$$

$$v(x) = e^{-kx}$$

$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = -ke^{-kx}$$

$$f = uv + 1 \text{ et } (uv)' = u'v + uv'$$

Pour tout réel x de \mathbb{R}_+ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-kx} + (x - 1) \times (-ke^{-kx}) + 0 \\ &= e^{-kx} (1 + (x - 1)(-k)) \\ &= e^{-kx} (1 - kx + k) \\ f'(x) &= \underline{\underline{e^{-kx} (-kx + k + 1)}} \end{aligned}$$

1. b. [1.5 point]

La tangente T a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

or $f(1) = 1$ et $f'(1) = e^{-k}$

Donc T a pour équation

$$y = e^{-k}(x - 1) + 1 = e^{-k}x - e^{-k} + 1$$

B est le point de T d'abscisse 0, donc

$$y_B = -e^{-k} + 1 = g(k)$$

2. [1 point]

D'après le tableau de variation de la fonction g de la partie A, pour tout réel positif k , $g(k) \in [0 ; 1]$.

Le point B ayant pour coordonnées $(0 ; g(k))$ avec $0 \leq g(k) \leq 1$, il appartient bien au segment $[OJ]$.

Exercice 3. Suites

7 points

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

1. [1.5 point] On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n , par $p_n = n^2 - 42n + 4$.

Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

$$p_{22} = 22^2 - 42 \times 22 + 4 = -436 \text{ et } p_{23} = 23^2 - 42 \times 23 + 4 = -433$$

$$p_{22} < p_{23} \text{ donc la suite } (p_n) \text{ n'est pas décroissante.}$$

Affirmation 1 fausse

2. [2 points] On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n , $n^2 \leq (n+1)^2 w_n \leq n^2 + n$.

Affirmation 2 : La suite (w_n) converge.

Pour tout n non nul,

$$n^2 \leq (n+1)^2 w_n \leq n^2 + n \iff \frac{n^2}{(n+1)^2} \leq w_n \leq \frac{n^2 + n}{(n+1)^2}$$

$$\iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leq w_n \leq \frac{n^2 + n}{n^2 + 2n + 1}$$

$$\iff \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^2 \leq w_n \leq \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

Or on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^2 = 1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1$$

D'après le théorème des gendarmes (ou d'encadrement), on peut en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$.

Donc la suite (w_n) converge.

Affirmation 2 vraie

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + U_n}$.

1. [0.5 point]

$$U_1 = \frac{2U_0}{1 + U_0} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

2. [2 points] On va démontrer par récurrence, pour tout entier naturel n , la propriété $\mathcal{P}_n : U_n = \frac{2^n}{1 + 2^n}$.

- Initialisation

Pour $n = 0$, $\frac{2^n}{1 + 2^n} = \frac{2^0}{1 + 2^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} = U_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- Hérité

On suppose la propriété vraie pour un entier naturel n quelconque ; on va démontrer que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

$$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n} = \frac{2 \frac{2^n}{1+2^n}}{1 + \frac{2^n}{1+2^n}} = \frac{2 \times 2^n}{1+2^n} \times \frac{1+2^n}{1+2^n+2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2 \times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , on a $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

3. [1 point] On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n , p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$u \leftarrow \frac{1}{2}$ $i \leftarrow 0$ Tant que $i < n$ $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ $i \leftarrow i + 1$ Fin Tant que	$u \leftarrow \frac{1}{2}$ Pour i allant de 0 à n $u \leftarrow \frac{2u}{u+1}$ Fin Pour	$p \leftarrow 2^n$ $u \leftarrow \frac{p}{p+1}$

Dans l'algorithme 2, le nombre i varie entre 0 et n donc prend $n + 1$ valeurs; la valeur de u en sortie est donc U_{n+1} . L'algorithme 2 ne convient donc pas.

↩ **Fin du devoir** ↪