Math93.com

Devoir Surveillé n°B2 Bis
Tle Spécialité
Bilan 1
Durée 2 heures - Coeff. 10
Noté sur 20 points

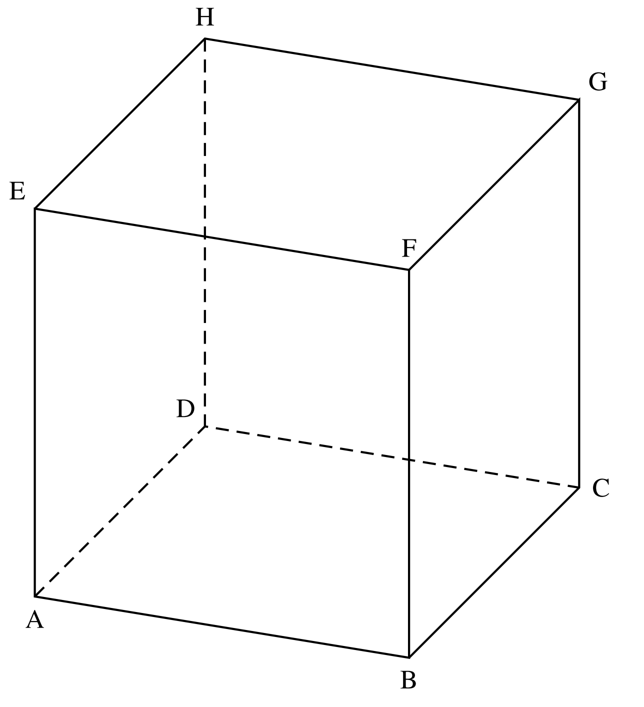
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

L'utilisation des ***fiches de cours*** *est exceptionnellement autorisé pour ce devoir de Noël sous réserve qu'elles soient MANUSCRITES ET dans un PORTE-VUES*

Exercice 1. Espace — 6 points

Soit ABCDEFGH un cube. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



Pour tout réel t, on considère le point M de coordonnées $(1-t\ ;\ t\ ;\ t)$.

1. Montrer que pour tout réel t, le point M appartient à la droite (BH).

On admet que les droites (BH) et (FC) ont respectivement pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}\right. \text{ où } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t' \end{array}\right. \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales et non coplanaires.

3. Pour tout réel t', on considère le point $M'(1; t'; 1-t')$.

3. a. Montrer que pour tous réels t et t', $MM'^2 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

3. b. Pour quelles valeurs de t et de t' la distance MM' est-elle minimale ? Justifier.

3. c. On nomme P le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$et Q celui de coordonnées $\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
Justifier que la droite (PQ) est perpendiculaire aux deux droites (BH) et (FC).

Exercice 2. Fonctions 7 points

Partie A

La fonction g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

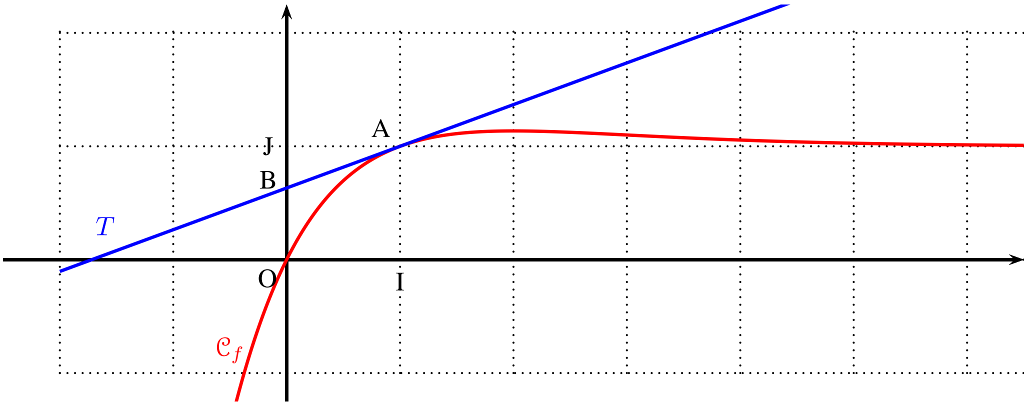
3. Étudier la convexité de g.

Partie B

Dans cette partie, k désigne un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-kx} + 1.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; I, J), on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. Cette courbe est représentée ci-dessous pour une certaine valeur de k.
La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées en un point noté B.



1.

1. a. Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-kx}(-kx + k + 1).$$

1. b. Démontrer que l'ordonnée du point B est égale à $g(k)$ où g est la fonction définie dans la **partie A**.

2. En utilisant la **partie A**, démontrer que le point B appartient au segment [OJ].

Exercice 3. Suites — 7 points

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n, par

$$p_n = n^2 - 42n + 4.$$

Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

2. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n,

$$n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n.$$

Affirmation 2 : La suite (w_n) converge.

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n}.$$

1. Calculer U_1 que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$U_n = \frac{2^n}{1+2^n}.$$

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.

   Déterminer lequel en justifiant votre choix.

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**

$u \leftarrow \dfrac{1}{2}$
$i \leftarrow 0$
Tant que $i < n$
    $u \leftarrow \dfrac{2u}{u+1}$
    $i \leftarrow i+1$
Fin Tant que
	$u \leftarrow \dfrac{1}{2}$
	Pour i allant de 0 à n
	    $u \leftarrow \dfrac{2u}{u+1}$
	Fin Pour
		$p \leftarrow 2^n$
		$u \leftarrow \dfrac{p}{p+1}$

Fin du devoir