Math93.com

Devoir Surveillé n°B3
Correction

Tle Spécialité

Probabilités et loi binomiale
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Exercice 1. Dans une jardinerie

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs :

- 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
- La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

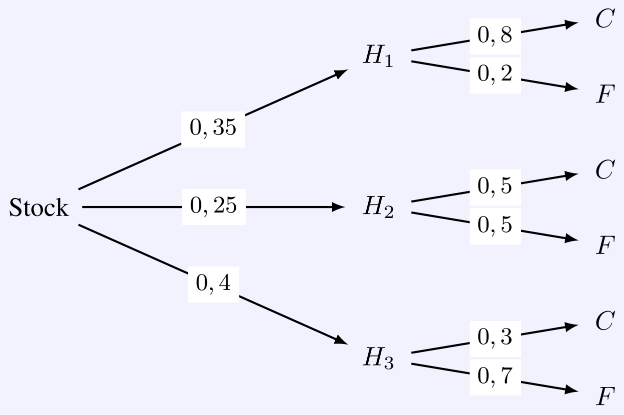
1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

1. a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

Corrigé (1,5 point)



1. b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

Corrigé (1,5 point)

On cherche à calculer la probabilité de l'intersection $H_3 \cap C$, donc :

$$P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3$$

On a donc $\underline{P(H_3 \cap C) = 0,12}$.

1. c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

Corrigé (2 point)

Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. On peut donc appliquer la loi des probabilités totales, et on en déduit :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) \\ &= 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 \\ P(C) &= \underline{0,525} \end{aligned}$$

1. d. L'arbre choisi est un conifère.
Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

Corrigé (1,5 point)

On cherche cette fois à calculer une probabilité conditionnelle :

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx \underline{0,533}$$

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

2. a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Corrigé (1,5 point)

Nous avons un schéma de Bernoulli (l'arbre choisi est-il un conifère ou pas), avec une probabilité de succès de $0,525$ qui est répété 10 fois de façon indépendante et identique, donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit bien une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,525$. On a pour $0 \leqslant k \leqslant 10$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times 0,525^k \times 0,475^{n-k}$$

2. b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et en donner une interprétation dans le cadre de l'exercice.

Corrigé (1,5 point)

Puisque la variable X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,525$, son espérance est $E(X) = np$. On a donc :

$$E(X) = np = 10 \times 0,525 = \underline{5,25}$$

Cela signifie qu'en moyenne, 5,25 arbres sur les 10 choisis sont des conifères.

2. c. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
On arrondira à 10^{-3}.

Corrigé (1,5 point)

La probabilité demandée ici est celle de l'événement $X = 5$, et donc :

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times (0,475)^5$$

Finalement $P(X = 5) \approx 0,243$.

2. d. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
On arrondira à 10^{-3}.

Corrigé (1,5 point)

Si échantillon comporte au moins deux arbres feuillus, il comporte au plus 8 conifères.
La probabilité demandée est donc celle de l'évènement $(X \leqslant 8)$, qui est l'événement contraire de la réunion des événements disjoints $(X = 9)$ et $(X = 10)$. On a alors :

$$P(X \leqslant 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \approx \underline{0,984}$$

3. Soit n un entier, $n > 1$.

On choisit au hasard un échantillon de n arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de n arbres dans le stock.

On appelle Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

3. a. On note A_n l'évènement « *au moins 1 des n arbres choisis est un conifère* ».
Montrer que la probabilité de A_n est $1 - (0,475)^n$.

Corrigé (2 points)

Nous avons un schéma de Bernoulli (l'arbre choisi est-il un conifère ou pas), avec une probabilité de succès de $p = 0,525$ qui est répété n fois de façon indépendante et identique, donc la variable aléatoire Y_n qui compte le nombre de succès suit bien une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,525$.
On a pour $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$P(Y_n = k) = \binom{n}{k} \times 0,525^k \times 0,475^{n-k}$$

La probabilité cherchée est celle de l'évènement $A_n = (Y_n \geqslant 1)$. On a :

$$P(A_n) = P(Y_n \geqslant 1) = 1 - P(Y_n = 0) = \underline{1 - (0,475)^n}$$

3. b. Déterminer avec la calculatrice la taille n minimale de l'échantillon pour que $P(A_n) \geqslant 0,9999$.

Corrigé (2 points)

On cherche n pour que :

$$P(Y_n \geqslant 1) = 1 - (0,475)^n \geqslant 0,9999 \iff (0,475)^n \leqslant 10^{-4}$$

- <u>Méthode 1</u>.
  La suite géométrique de terme général $u_n = 0,475^n$ est strictement décroissante puisque $q = 0,475 \in]0\,;\,1[$. Par ailleurs :

  $$\begin{cases} 0,475^{12} \approx 0.000131924 > 10^{-4} \\ 0,475^{13} \approx 6 \times 10^{-5} < 10^{-4} \end{cases} \implies n \geqslant 13$$

  Donc la taille n minimale de l'échantillon pour que $P(A_n) \geqslant 0,9999$ est de $n = 13$.
- <u>Méthode 2</u>.
  En composant par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

  $$\begin{aligned} 0,475^n \leqslant 10^{-4} &\iff \ln 0,475^n \leqslant \ln 10^{-4} \\ &\iff n \ln 0,475 \leqslant \ln 10^{-4} \quad \text{attention } \ln 0,475 < 0 \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln 10^{-4}}{\ln 0,475} \approx 12.37 \implies n \geqslant 13 \end{aligned}$$

Donc la taille n minimale de l'échantillon pour que $P(A_n) \geqslant 0,9999$ est de $n = 13$.

3. c. Déterminer la taille n minimale de l'échantillon pour qu'en moyenne, au moins 100 arbres sur les n choisis soient des conifères.

Corrigé (1,5 point)

L'espérance de la variable Y_n est $E(Y_n) = np = 0,525n$.
Pour qu'en moyenne, au moins 100 soient vaccinées il faut que :

$$0,525n \geqslant 100 \iff n \geqslant \frac{100}{0,525} \approx 190,5$$

Le nombre minimal d'arbres de l'échantillon pour qu'en moyenne, au moins 100 arbres sur les n choisis soient des conifères est donc de 191 :

3. d. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $P(A_n)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé (2 points)

Puisque $q = 0,475 \in]-1\ ;\ 1[$ on a ;

$$\lim_{n\to+\infty} 0,475^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1 - 0,475^n = 1$$

Et donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$$

Plus l'échantillon est grand, plus la probabilité de l'évènement A_n tend vers 1. C'est à dire que plus l'échantillon est de taille importante, plus on est quasi certain d'avoir au moins un conifère dans l'échantillon.

Fin du devoir