Math93.com

Devoir Surveillé n°B3
Tle Spécialité
Probabilités et loi binomiale
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Exercice 1. Dans une jardinerie

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs :

- 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
- La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

1. a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

1. b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

1. c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

1. d. L'arbre choisi est un conifère.
Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

2. a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et en donner une interprétation dans le cadre de l'exercice.

2. c. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
On arrondira à 10^{-3}.

2. d. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
On arrondira à 10^{-3}.

3. Soit n un entier, $n > 1$.

On choisit au hasard un échantillon de n arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de n arbres dans le stock.

On appelle Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

3. a. On note A_n l'évènement « *au moins 1 des n arbres choisis est un conifère* ».
Montrer que la probabilité de A_n est $1-(0,475)^n$.

3. b. Déterminer avec la calculatrice la taille n minimale de l'échantillon pour que $P(A_n) \geqslant 0,9999$.

3. c. Déterminer la taille n minimale de l'échantillon pour qu'en moyenne, au moins 100 arbres sur les n choisis soient des conifères.

3. d. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $P(A_n)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Fin du devoir