Math93.com

Devoir Surveillé n°B5
Tle Spécialité
Logarithme et suites
Durée 2,5 heures - Coeff. 12
Noté sur 21.5 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Déjà vu — 1 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante après avoir rapidement déterminé les conditions d'existence.

$$\ln x + \ln(x-3) < 2\ln 2$$

Corrigé

- Il faut que $x > 3$.
- Pour $x > 3$ on a :

$$\begin{aligned}
\ln x + \ln(x-3) < 2\ln 2 &\iff \ln x(x-3) < \ln 4 \text{ On compose par la fonction exp strictement croissante sur } \mathbb{R}\\
&\iff x(x-3) < 4\\
&\iff x^2 - 3x - 4 < 0 \text{ expression pol. du 2nd degré, } \Delta = 25 \text{ et les racines } -1 \text{ et } 4\\
&\iff (x+1)(x-4) < 0\\
&\iff \Big(-1 < x < 4\Big) \text{ et } x > 3
\end{aligned}$$

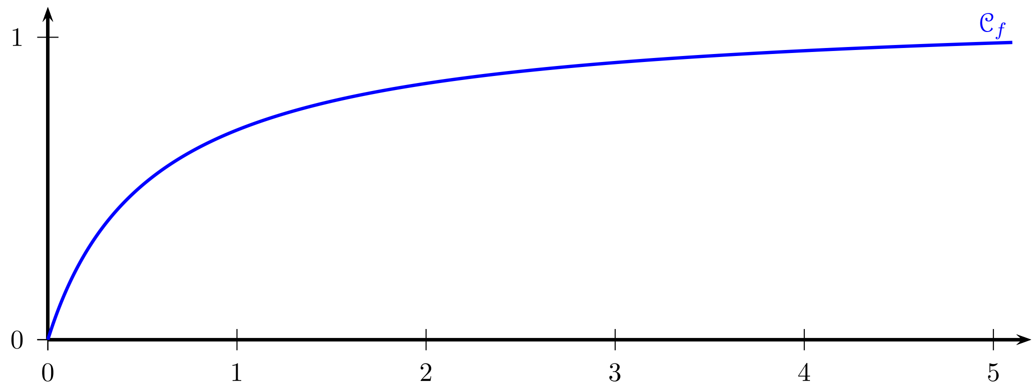
- Conclusion : $\underline{S =]3\ ;\ 4[}$.

Exercice 2. — 9.5 points

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

Corrigé (1.25 point)

- **(0.25)** - Pour x positif non nul ($x > 0$), on a

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

Attention : il faut bien que x soit non nul pour effectuer cette transformation, puisque l'on cherche la limite en l'infini, cela ne pose pas de problème de le supposer.

- **(0.75)** - Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{3}{1} = 3$$

et finalement par composition puisque $\lim\limits_{X\to 3} \ln X = \ln 3$ on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 3}$$

- **(0.25)** - Ce résultat montre que géométriquement la droite d'équation $y = \ln 3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

2.

2. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

Corrigé (0.75 point)

- Méthode 1.
Pour $x \geqslant 0$, on a

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$$

f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et de la forme $\ln u$ donc de dérivée u'/u.
Pour tout $x \geqslant 0$, avec $u(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$, on a :

$$u'(x) = \frac{3(x+1) - 1 \times (3x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Donc

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{3x+1} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{2}{(3x+1)(x+1)}}$$

- Méthode 2 : une astuce.
Pour $x \geqslant 0$, on a

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right) = \ln(3x+1) - \ln(x+1)$$

f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{3x+1} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{3(x+1)-(3x+1)}{(3x+1)(x+1)} \\ f'(x) &= \frac{2}{(3x+1)(x+1)} \end{aligned}$$

2. b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Corrigé (0,5 point)

Pour tout réel $x \geqslant 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{2}{(3x+1)(x+1)}$$

Puisque $x \geqslant 0$, on a $\begin{cases} (3x+1) > 0 \\ (x+1) > 0 \end{cases}$. Le dénominateur est donc strictement positif.

$f'(x)$ est donc positif strictement, donc f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty]$. On a :

$$f(0) = \ln \frac{1}{1} = 0\ .$$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$0 \nearrow \ln 3$

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n)\ .$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Corrigé (1,5 point)

Notons $P(n)$ la propriété $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- <u>(0.25) Initialisation</u> : $u_0 = 3$ et $u_1 = \ln\left(\frac{9+1}{3+1}\right) = \ln \frac{10}{4} = \ln \frac{5}{2} \approx 0,92$.

  On a bien $\frac{1}{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

- <u>(1) Hérédité</u> : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

  Par croissance (démontrée en **A. 2.**) de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f\left(u_n\right) \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{2}+1}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \approx 0,51 > 0,5 \end{cases} \Longrightarrow 0,5 < f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f\left(u_n\right)$$

On a donc l'encadrement :

$$\frac{1}{2} \leqslant f\left(u_{n+1}\right) = u_{n+2} \leqslant f\left(u_{n+1}\right) = u_{n+1}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$, elle est héréditaire.

- (0.25) Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, on a donc démontré que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Corrigé (0,5 point)

Le résultat précédent montre que le suite (u_n) est décroissante et minorée par $\dfrac{1}{2}$: elle converge donc vers une limite supérieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$, donc strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ où

$$x_0 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,215 \text{ et } g\left(x_0\right) \approx 0,088, \text{ en arrondissant à } 10^{-3}.$$

x	0		x_0		$+\infty$
Variations de g	0	$\nearrow$	$g\left(x_0\right) \approx 0.088$	$\searrow$	$-\infty$

1. Retrouver par le calcul les variations de la fonction g ainsi que la limite de g en $+\infty$.

Corrigé (2 points)

- Variations.
  Pour $x \geqslant 0$, la fonction g est définie et dérivable et :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= \frac{2}{(3x+1)(x+1)} - 1 \\ &= \frac{2-(3x+1)(x+1)}{(3x+1)(x+1)} \\ &= \frac{2-\left(3x^2+4x+1\right)}{(3x+1)(x+1)} \\ &= \frac{-3x^2-4x+1}{(3x+1)(x+1)} \end{aligned}$$

Pour $x \geqslant 0$, le dénominateur est strictement positif donc g' est du signe du numérateur $(-3x^2-4x+1)$.
L'expression $\left(-3x^2 -4x+\ 1\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=-3 \\ b=-4 \\ c=1 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 28 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-3x^2 -4x+\ 1\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{28}}{-6} \approx 0.2 \in [0\ ;\ +\infty[\quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4+\sqrt{28}}{-6} \approx -1.5 \notin [0\ ;\ +\infty[$$

Puisque $a=-3<0$, l'expression est négative à l'extérieur des racines et on obtient avec :

$$x_1 = \frac{-4+2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} = x_0 \approx 0,215$$

x	0		x_0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0		$-$		
Variations de g	0	$\nearrow$	$g(x_0) \approx 0.088$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- Limite.
  On utilise le résultat de la question A1. et par somme on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \end{array}\right. \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right) = -\infty$$

2. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.

Corrigé (0,75 point)

- (0.25) - Sur $[0\ ;\ x_0]$: la fonction g est strictement croissante et continue. Puisque $g(0)=0$, l'équation admet une unique solution $\beta=0$. or on cherche une solution strictement positive.
- (0.5) - Sur $[x_0\ ;\ +\infty[$: la fonction g est strictement décroissante et continue. Le réel $k=0$ est compris entre $g(x_0) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Donc donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in [x_0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$.
  Comme $x_0>0,\ \alpha>0$, on a bien obtenu une solution strictement positive.

x	0		x_0		α		$+\infty$
Variations de g	0	$\nearrow$	$g(x_0) \approx 0.088$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3.

3. a. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à $0,01$ près.

$x \leftarrow 0,22$
Tant que .... faire
    $x \leftarrow x + 0,01$
Fin de Tant que

Corrigé (0,5 point)

$x \leftarrow 0,22$
Tant que $g(x) > 0$ faire
    $x \leftarrow x + 0,01$
Fin de Tant que

3. b. Donner alors en le justifiant avec soin,la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

Corrigé (0.75 point)

La fonction g est strictement décroissante sur $[x_0\ ;\ +\infty$ et :

$$\begin{cases} g(0,52) \approx 0,0013 > 0 \\ g(0,53) \approx -0,0036 < 0 \end{cases} \Longrightarrow 0,52 < \alpha < 0,53$$

Donc la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme est $0,53$.

4. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Corrigé (1 point)

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$ donc :

$$f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0 \iff g(\ell) = 0$$

De ce fait, ℓ est la solution strictement positive de l'équation $g(x) = 0$ soit α. On a donc d'après ce qui précède :

$$\boxed{\ell \approx 0,53}$$

Exercice 3. Suite implicite — 11 points

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$$

1. a. Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x)$.

Corrigé (1 point)

- Limite en 0^+.
  Pour $n > 0$ et pour $x > 0$ on a :

$$f_n(x) = \ln x + \left(\frac{x}{n} - 1\right)$$

  or :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{n} - 1\right) = -1 \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_n(x) = -\infty}$$

- Limite en $+\infty$.

Pour $n > 0$ et pour $x > 0$ on a :

$$f_n(x) = \ln x + \left(\frac{x}{n} - 1\right)$$

or :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{n} - 1\right) = +\infty \ \underline{\text{car } n > 0} \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$$

1. b. Montrer en étudiant ses variations, que la fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Corrigé (1 point)

Soit $n > 0$ et sur $x \in]0\ ;\ +\infty[$:

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$$

La fonction f_n est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle on a :

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$$

Donc puisque $n > 0$ et $x > 0$, f_n' est strictement positive et f_n strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. c. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$.
On note α_n cette solution.
Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

Corrigé (1 point)

x	0	1	α	e	$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$	‖		$+$		
Variations de f_n	‖ $-\infty$	$\frac{1}{n} - 1 \leqslant 0$	0	$\frac{\mathrm{e}}{n} > 0$	$+\infty$

Soit $n > 0$.

- La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
- Le réel 0 est compris entre $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
- Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$. On note α_n cette solution donc $f_n(\alpha_n) = 0$.
- Par ailleurs :
  - Si $n = 1$, $f_1(1) = 0$ et donc $\alpha_1 = 1$ est bien solution de l'équation.
  - Si $n > 1$:

$$\begin{cases} f_n(1) = \frac{1}{n} - 1 \leqslant 0 \ \text{ car } n > 1 \\ f_n(\mathrm{e}) = \frac{\mathrm{e}}{n} > 0 \ \text{ car } n > 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{1 < \alpha_n < \mathrm{e}}$$

1. d. Déterminer le signe de $f_n(x)$ suivant suivant les valeurs du réel x.

Corrigé (0,5 point)

D'après le tableau de variations de f_n, on a directement le signe de f_n :

x	0		α		$+\infty$
Variations de f_n	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		α		$+\infty$
Signe de f_n	$\Vert$	$-$	0	$+$	

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On note Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien qui est fournie en annexe du sujet.

Soit n un entier naturel non nul.

2. a. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\ ;\ 0)$.

Corrigé (0,5 point)

Une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\ ;\ 0)$ est de la forme $y = mx + p$ avec :

$$\begin{cases} A(0\ ;\ 1) \\ B(n\ ;\ 0) \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{n} \Longrightarrow y = -\frac{1}{n}x + p$$

Par ailleurs la droite passe par $A(0\ ;\ 1)$ donc

$$1 = -\frac{1}{n} \times 0 + p \Longrightarrow p = 1$$

Soit :

$$\boxed{\Delta_n \quad : \quad y = -\frac{1}{n}x + 1}$$

2. b. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec Δ_n .

Corrigé (1 point)

L'abscisse du point d'intersection de Γ avec Δ_n est solution de l'équation :

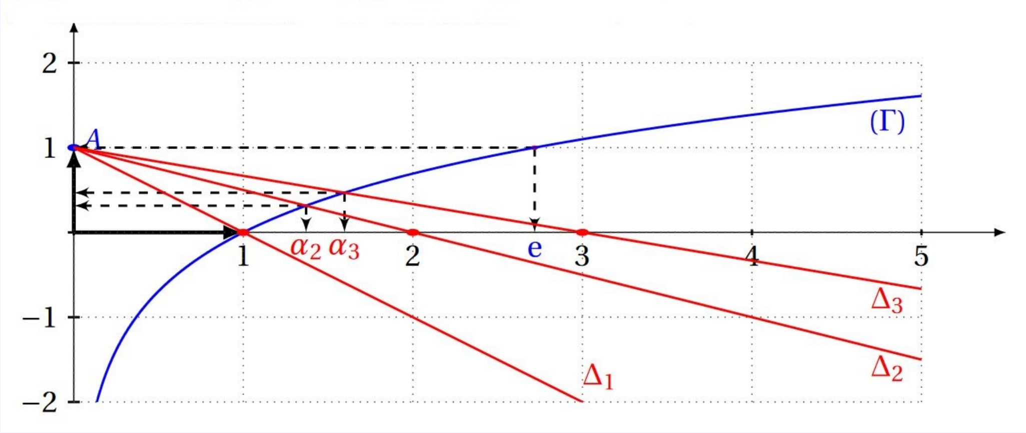
$$-\frac{1}{n}x + 1 = \ln x \iff \ln x + \frac{1}{n}x - 1 = 0 \iff f_n(x) = 0$$

Or on a montré lors de la question (1.c.) que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$ notée α_n.

Donc α_n est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec Δ_n .

2. c. Représenter sur le document fourni en annexe les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 , ainsi que les réels α_1, α_2 et α_3.

Corrigé (0,5 point)



2. d. Précisez la valeur de α_1 puis conjecturer le sens de variations de la suite (α_n) .

Corrigé (0,5 point)

α_1 est la solution de $\ln x + x - 1 = 0$ qui a pour solution évidente $\alpha_1 = 1$(suggéré aussi par le croquis). Toujours d'après le croquis la suite (α_n) semble croissante

3.

3. a. Montrer que pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{-x}{n(n+1)}$$

Corrigé (0.75 point)

Soit $n > 0$, pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \ln x + \frac{x}{n+1} - 1 - \left(\ln x + \frac{x}{n} - 1\right) \\ &= \frac{x}{n+1} - \frac{x}{n} \\ &= \frac{nx - (n+1)x}{n(n+1)} \\ f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \frac{-x}{n(n+1)} \end{aligned}$$

3. b. En déduire que pour tout entier n non nul :

$$f_n(\alpha_{n+1}) > 0$$

Corrigé (1 point)

Par définition on a pour $n > 0$, $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ donc en remplaçant x par α_{n+1} dans la relation précédente on obtient :

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{-x}{n(n+1)} \\ f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \end{cases} \implies \underbrace{f_{n+1}(\alpha_{n+1})}_{=0} - f_n(\alpha_{n+1}) = \frac{-\alpha_{n+1}}{n(n+1)}$$

Et donc :

$$f_n(\alpha_{n+1}) = \frac{\alpha_{n+1}}{n(n+1)}$$

Or on a montré (question 1.c.) que $1 < \alpha_{n+1} < \mathrm{e}$ et pour tout entier n non nul $n(n+1) > 0$ donc :

$$\begin{cases} 1 < \alpha_{n+1} < \mathrm{e} \\ n(n+1) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{f_n\left(\alpha_{n+1}\right) = \frac{\alpha_{n+1}}{n(n+1)} > 0}$$

3. c. Déduire de la question précédente le sens de variations de la suite (α_n).

Corrigé (0,75 point)

Pour tout entier $n > 0$ on a donc :

$$f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0 = f_n\left(\alpha_n\right) \Longrightarrow f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > f_n\left(\alpha_n\right)$$

Et la croissance de la fonction f_n sur $]0\,;\,+\infty[$ permet donc d'affirmer que :

$$\alpha_{n+1} > \alpha_n$$

La suite (α_n) est donc strictement croissante.

3. d. Montrer que la suite (α_n) converge.

Corrigé (0,5 point)

- D'après la question **3.c.** (α_n) est croissante.
- et d'après la question **1.c.** on a pour tout entier n :

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant \mathrm{e}$$

Donc suite (α_n) est croissante et majorée par e, elle est donc d'après le théorème de convergence monotone, convergente vers un réel ℓ avec :

$$1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}$$

.

3. e. Montrer que pour $n > 0$, on a :

$$\ln \alpha_n = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$$

En déduire la limite de la suite $(\ln \alpha_n)$ puis celle de (α_n).

Aide : on pourra utiliser un encadrement de α_n et en déduire un de $1 - \frac{\alpha_n}{n}$.

Corrigé (2 points)

- Par définition on a pour $n > 0$:

$$f_n(\alpha_n) = 0 \iff \ln \alpha_n + \frac{\alpha_n}{n} - 1 = 0 \iff \ln \alpha_n = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$$

- Or pour $n > 0$:

$$1 < \alpha_n < \mathrm{e} \iff -\frac{\mathrm{e}}{n} < -\frac{\alpha_n}{n} < -\frac{1}{n} \iff 1 - \frac{\mathrm{e}}{n} < 1 - \frac{\alpha_n}{n} < 1 - \frac{1}{n}$$

  Et donc

$$1 - \frac{\mathrm{e}}{n} < \ln \alpha_n < 1 - \frac{1}{n}$$

- Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, par théorème d'encadrement on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \ln \alpha_n = 1 = \ln \mathrm{e}$$

- Par continuité de la fonction logarithme, cela implique que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \mathrm{e}}$$

Fin du devoir