Math93.com

Devoir Surveillé n°B5

Tle Spécialité

Logarithme et suites

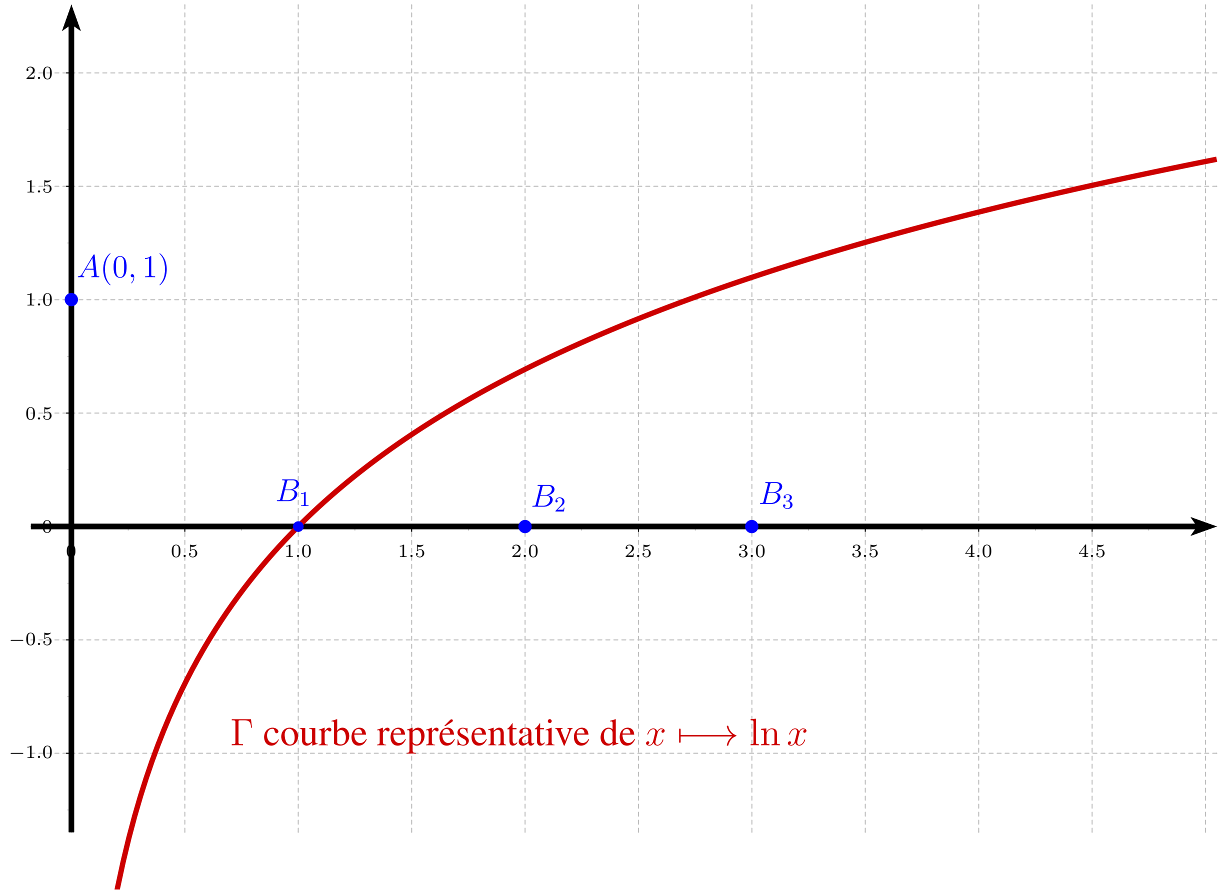
Durée 2,5 heures - Coeff. 12

Noté sur 21.5 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Annexe de l'exercice 3 page 3 (à rendre avec la copie)



Exercice 1. Déjà vu — 1 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante après avoir rapidement déterminé les conditions d'existence.

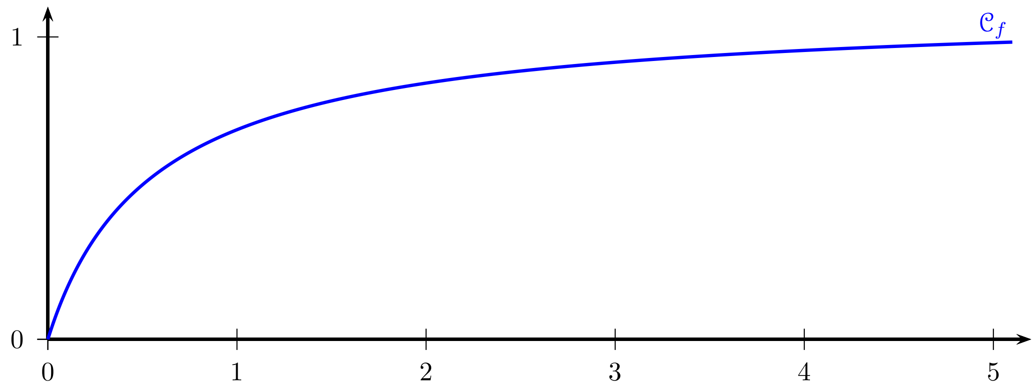
$$\ln x + \ln(x-3) < 2\ln 2$$

Exercice 2. 9.5 points

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

2.

2. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

2. b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ où

$$x_0 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,215 \text{ et } g(x_0) \approx 0,088, \text{ en arrondissant à } 10^{-3}.$$

x	0	x_0	$+\infty$
Variations de g	0 ↗	$g(x_0) \approx 0.088$	↘ $-\infty$

1. Retrouver par le calcul les variations de la fonction g ainsi que la limite de g en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.

3.

3. a. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à $0,01$ près.

3. b. Donner alors en le justifiant avec soin,la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

```
x ← 0,22
Tant que ......... faire
        x ← x + 0,01
Fin de Tant que
```

4. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 3. Suite implicite — 11 points

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$$

1. a. Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f_n(x)$.

1. b. Montrer en étudiant ses variations, que la fonction f_n est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. c. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$.
On note α_n cette solution.
Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$.

1. d. Déterminer le signe de $f_n(x)$ suivant suivant les valeurs du réel x.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On note Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien qui est fournie en annexe du sujet.

Soit n un entier naturel non nul.

2. a. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\ ;\ 0)$.

2. b. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec Δ_n .

2. c. Représenter sur le document fourni en annexe les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 , ainsi que les réels α_1, α_2 et α_3.

2. d. Précisez la valeur de α_1 puis conjecturer le sens de variations de la suite (α_n) .

3.

3. a. Montrer que pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{-x}{n(n+1)}$$

3. b. En déduire que pour tout entier n non nul :

$$f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$$

3. c. Déduire de la question précédente le sens de variations de la suite (α_n).

3. d. Montrer que la suite (α_n) converge.

3. e. Montrer que pour $n > 0$, on a :

$$\ln \alpha_n = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$$

En déduire la limite de la suite $(\ln \alpha_n)$ puis celle de (α_n).
Aide : on pourra utiliser un encadrement de α_n et en déduire un de $1 - \dfrac{\alpha_n}{n}$.

Fin du devoir