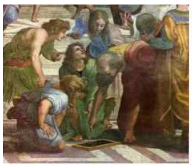

Math93.com

Devoir Surveillé n°C1-A
Tle Spécialité
Primitives et équations différentielles
Durée 2 heures - Coeff. 10
Noté sur 20.5 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Exercice 1. Primitives — 1.5 point

Donner sans aucune justification une primitives des fonctions suivantes :

Corrigé

Fonction définie sur I par :	I	UNE primitive définie sur I par :
$f(x) = 1 + x + x^2$	$\mathbb{R}$	$F(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$
$g(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$	$\mathbb{R}$	$G(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1}$
$h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$H(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$
$i(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$	$\mathbb{R}$	$I(x) = \sqrt{x^2+1}$

Exercice 2. — 1 point

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Déterminer la primitive de la fonction g qui prend la valeur 0 en 1.

Corrigé

$G(x) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \mathrm{e}$

Exercice 3. — 1 point

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 10y$.

Corrigé

$y(x) = C\,\mathrm{e}^{10x}$, avec C réel.

2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(2) = 3$.

Corrigé

$$y(2)=3 \iff C\,\mathrm{e}^{20}=3 \iff C=3\,\mathrm{e}^{-20}$$

Ainsi,

$$f(x)=3\,\mathrm{e}^{-20}\,\mathrm{e}^{10x}=\underline{3\,\mathrm{e}^{10x-20}}$$

Exercice 4. 2 points

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'+2y=3$.

Corrigé

La solution constante de (E) est $y=\frac{3}{2}$. L'ensemble des solutions est formé des fonctions u telles que

$$u(x)=C\,\mathrm{e}^{-2x}+\frac{3}{2}$$

, avec C réel.

2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f'(0)=2$.

Corrigé

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \ f'(x)=-2C\,\mathrm{e}^{-2x}$$

Donc

$$f'(0)=2 \iff -2C\,\mathrm{e}^{0}=2 \iff C=-1$$

Soit

$$\boxed{f(x)=-\,\mathrm{e}^{-2x}+\frac{3}{2}}$$

Exercice 5. 2 points

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : z'-4z=1$.

Corrigé

L'équation $(E_1) : z'-4z=1$ a pour solutions $z(x)=C\,\mathrm{e}^{4x}-\frac{1}{4}$, avec C réel.

2. Soit l'équation différentielle $(E_2) : y''-4y'=1$.
En posant $z=y'$, déduire de la question 1°) l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_2).

Corrigé

$$y''-4y'=1 \iff \begin{cases} z=y' \\ z'-4z=1 \end{cases}$$

On a $z=y'$ donc y est une primitive de z soit en utilisant le résultat de la question 1°) :

$$y''-4y'=1 \iff \begin{cases} z=y' \\ z'-4z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} z=y' \\ z(x)=C\,\mathrm{e}^{4x}-\frac{1}{4} \end{cases},C\in\mathbb{R}$$

Soit avec C et D réels :

$$\boxed{y(x) = \frac{C}{4}\,\mathrm{e}^{\,4x} - \frac{1}{4}x + D}$$

Exercice 6. Nombre de noyaux radioactifs — 3 points

Soit $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs d'un corps à l'instant t, où t est exprimé en jours.
On admet que la fonction N est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est une constante réelle.

1. Déterminer $N(t)$ en fonction de a, sachant que $N(0) = 10^9$.

Corrigé

Pour t réel positif et a est une constante réelle :

$$N(t) = 10^9\,\mathrm{e}^{\,at}$$

2. Au bout de 18 jours, le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié.

Calculer la valeur exacte de a.

Corrigé

On a :

$$N(18) = \frac{N(0)}{2} \iff \mathrm{e}^{\,a18} = \frac{1}{2} \iff a = \frac{-\ln 2}{18}$$

3. Au bout de combien de jours le nombre de noyaux radioactifs deviendra-t-il inférieur à 100 ?

Corrigé

$$\begin{aligned} N(t) < 100 &\iff 10^9\,\mathrm{e}^{\,\frac{-\ln 2}{18}t} < 100 \\ &\iff \mathrm{e}^{\,\frac{-\ln 2}{18}t} < 10^{-7} \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned} &\iff \frac{-\ln 2}{18}t < \ln 10^{-7} \\ &\iff t > \frac{\ln 10^{-7}}{\frac{-\ln 2}{18}} \approx 418,7 \end{aligned}$$

Le nombre de noyaux radioactifs deviendra inférieur à 100 après 419 jours (mais au cours du 418$^{\text{e}}$).

Exercice 7. — 3 points

Soit pour x réel l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = x\,\mathrm{e}^{\,x}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{\,x}$ soit une solution de (E).

Corrigé

u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{\,x}$ est une solution de (E) si :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad u'(x) - 2u(x) = x\,\mathrm{e}^{\,x} &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad u'(x) - 2u(x) = x\,\mathrm{e}^{\,x}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad a\,\mathrm{e}^{\,x} + (ax+b)\,\mathrm{e}^{\,x} - 2(ax+b)\,\mathrm{e}^{\,x} = x\,\mathrm{e}^{\,x}\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{e}^{\,x}\Big(-ax+a-b\Big) = x\,\mathrm{e}^{\,x}\\ &\iff \begin{cases}-a = 1\\ a-b=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{u(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{\,x}}$$

2. En déduire toutes les solutions de (E).

Corrigé

Les solutions de (E) sont composées de la somme d'une solution particulière de (E) et des solutions générales de l'équation sans second membre : $y' - 2y = 0$ soit :

$$\boxed{y(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{\,x} + C\,\mathrm{e}^{\,2x}}$$

avec C constante réelle

3. Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

Corrigé

On cherche C tel que :

$$y(0) = 0 \iff (-0-1)\,\mathrm{e}^{\,0} + C\,\mathrm{e}^{\,0} = 0 \iff C = 1$$

Donc la solution est la fonction f d'expression

$$\boxed{f(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,2x}}$$

Exercice 8. Problème — 7 points

On cherche si il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases}(1)\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ \Big(f'(x)\Big)^2 - \Big(f(x)\Big)^2 = 1\\ (2)\ :\ f'(0) = 1\\ (3)\ :\ f' \text{ dérivable sur } \mathbb{R}\end{cases}$$

1.

1. a. Démontrer que, pour tout réel x on a : $f'(x) \neq 0$.

Corrigé

S'il existe x_0 tel que $f'(x_0) = 0$, alors en remplaçant dans la relation (1)

$$\Big(f'(x_0)\Big)^2 - \Big(f(x_0)\Big)^2 = 1 \iff -\Big(f(x_0)\Big)^2 = 1 \iff \Big(f(x_0)\Big)^2 = -1$$

Ce qui est impossible, donc $f'(x) \neq 0$ pour tout réel x.

1. b. Calculer $f(0)$.

Corrigé

$$\begin{cases} (1) \ : \ \left(f'(0)\right)^2 - \left(f(0)\right)^2 = 1 \\ (2) \ : \ f'(0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow 1 - \left(f(0)\right)^2 = 1 \Longrightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

2. En dérivant chaque membre de l'égalité (1), démontrer que :

(4) : pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = f(x)$.

Corrigé

$$(1) \ : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 = 1$$

Pour tout réel x, en dérivant l'égalité (1) on obtient :

$$2f'(x)f''(x) - 2f(x)f'(x) = 0 \iff 2f'(x)\left(f''(x) - f(x)\right) = 0$$

Or on a démontré que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\iff f''(x) - f(x) = 0$$

3. On pose $\begin{cases} u = f' + f \\ v = f' - f \end{cases}$.

3. a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

Corrigé

$$\begin{cases} u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1 \\ v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1 \end{cases}$$

3. b. Démontrer que $u' = u$ et que $v' = -v$.

Corrigé

Pour tout réel x on a :

$$\begin{cases} u(x) = f'(x) + f(x) \\ v(x) = f'(x) - f(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = f''(x) + f'(x) \\ v'(x) = f''(x) - f'(x) \end{cases}$$

Or d'après la question (2°) :

(4) : pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = f(x)$.

De ce fait :

$$\begin{cases} u'(x) = f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) = u(x) \\ v'(x) = f''(x) - f'(x) = f(x) - f'(x) = -v(x) \end{cases}$$

Pour tout réel x on a :

$$\boxed{\begin{cases} u'(x) = u(x) \\ v'(x) = -v(x) \end{cases}}$$

3. c. En déduire les expressions de u et v en résolvant les équations différentielle précédentes.

Corrigé

Pour tout réel x on a d'après la question 3b) :

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) \\ v'(x) = -v(x) \end{cases} \iff \begin{cases} u(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\,x} \\ v(x) = C_2\,\mathrm{e}^{\,-x} \end{cases}$$

Or d'après la question 3a) :

$$\begin{cases} u(0) = 1 \iff C_1\,\mathrm{e}^{\,0} = 1 \iff C_1 = 1 \\ v(0) = 1 \iff C_2\,\mathrm{e}^{\,0} = 1 \iff C_2 = 1 \end{cases}$$

Pour tout réel x on a donc :

$$\boxed{\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{\,x} \\ v(x) = \mathrm{e}^{\,-x} \end{cases}}$$

3. d. Déduire des questions précédentes que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}}{2}$$

Corrigé

Pour tout réel x on a d'après la question 3°) :

$$\begin{cases} u(x) = f'(x) + f(x) \\ v(x) = f'(x) - f(x) \end{cases}$$

Donc par soustraction :

$$u(x) - v(x) = 2f(x) \iff f(x) = \frac{u(x) - v(x)}{2} \iff \boxed{f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}}{2}}$$

4. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Corrigé

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}}{2}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\,x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\,-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,x}} = 0 \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\,x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\,-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\,x} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par différence}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

5. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Corrigé

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} > 0$$

La fonction exponentielle est strictement positive donc f' strictement positive sur $\mathbb{R}$ et f croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	$-\infty$		$+\infty$

Fin du devoir