Math93.com

Devoir Surveillé n°C2
Tle Spécialité
Intégration
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 22 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

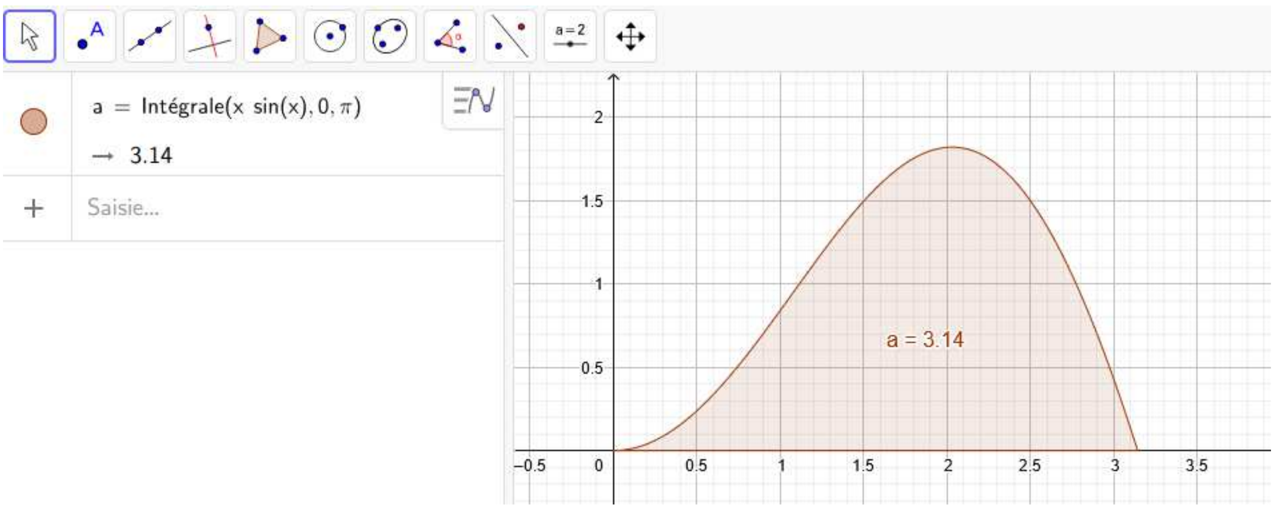
Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Exercice 1. Calculs d'intégrales — 5 points

1. Soit J défini par :

$$J=\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$$

Voici le résultat obtenu pour le calcul de J par le logiciel Géogebra :



A l'aide d'une intégration par partie, calculer la valeur exacte de J et comparer au résultat affiché par Géogébra.

Corrigé

On pose pour $x\in[0\ ;\ \pi]$:

$u'(x)=\sin x$	$u(x)=-\cos x$
$v(x)=x$	$v'(x)=1$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0\ ;\ \pi]$ donc :

$$\int_0^{\pi} u'v=\left[\ uv\ \right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} uv'$$

Soit ici :

$$\begin{aligned}J=\int_0^{\pi}\underbrace{\sin x}_{u'}\times\underbrace{x}_{v}\,\mathrm{d}x&=\left[\ uv\ \right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} uv'\\&=\left[\ -\cos x\times x\ \right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x\times 1\,\mathrm{d}x\\&=\left[\ -x\cos x+\sin x\ \right]_0^{\pi}\\J&=-\pi\cos\pi+\sin\pi-(-0\times\cos 0+\sin 0)\end{aligned}$$

$$\boxed{J = \pi}$$

2. Calculer à l'aide d'une double intégration par partie (on pourra s'aider du calcul précédent, ou pas) :

$$K = \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$$

Corrigé

On pose pour $x \in [0\ ;\ \pi]$:

$u'(x) = \cos x$	$u(x) = \sin x$
$v(x) = x^2$	$v'(x) = 2x$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0\ ;\ \pi]$ donc :

$$\int_0^{\pi} u'v = \left[\ uv\ \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} uv'$$

Soit ici :

$$\begin{aligned} J = \int_0^{\pi} \underbrace{\cos x}_{u'} \times \underbrace{x^2}_{v} \mathrm{d}x &= \left[\ uv\ \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} uv' \\ &= \left[\ \sin x \times x^2\ \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \times 2x \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\ x^2 \sin x\ \right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\left[\ x^2 \sin x\ \right]_0^{\pi}}_{0} - 2J \end{aligned}$$

$$\boxed{K = -2\pi}$$

Exercice 2. Une fonction définie à partir d'une intégrale — 5 points

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} \, \mathrm{d}t$$

1. Calculer g' la dérivée de g sur $[1\ ;\ +\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Corrigé

Sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t^2}$ est continue et positive.

D'après la théorème fondamental, la fonction g est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \geqslant 0$.

Donc g est strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que :

$$g(x) = 1 - \frac{1 + \ln x}{x}$$

Corrigé

On pose pour $t \in [1\ ;\ x]$:

$u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$	$u(t) = \dfrac{-1}{t}$
$v(t) = \ln t$	$v'(t) = \dfrac{1}{t}$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1\ ;\ x]$ donc :

$$\int_1^x u'v = [\ uv\ ]_1^x - \int_1^x uv'$$

Soit ici :

$$\begin{aligned} g(x) = \int_1^x \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{u'} \times \underbrace{\ln t}_{v}\,\mathrm{d}x &= [\ uv\ ]_1^x - \int_1^x uv' \\ &= \left[\ \frac{-1}{t} \times \ln t\ \right]_1^x - \int_1^x \frac{-1}{t} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\ \frac{-\ln t}{t}\ \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\ \frac{-\ln t}{t} - \frac{1}{t}\ \right]_1^x \\ &= \left[\ \frac{-1-\ln t}{t}\ \right]_1^x \\ &= \frac{-\ln x - 1}{x} - \frac{-\ln 1 - 1}{1} \\ &= 1 - \frac{1+\ln x}{x} \end{aligned}$$

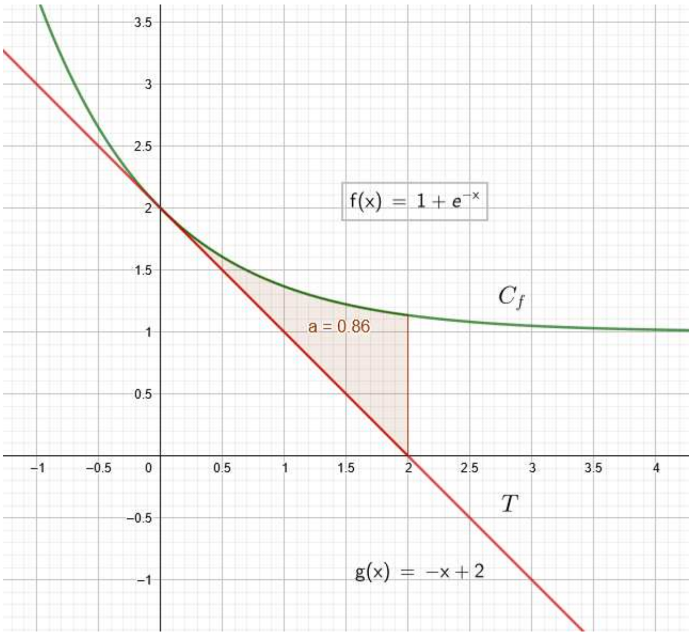
$$\boxed{g(x) = 1 - \frac{1+\ln x}{x}}$$

Exercice 3. Aire entre deux courbes — 5 points

Soit f la fonction de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

Soit T la droite d'équation $y = -x + 2$.
L'objectif est de déterminer l'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Le logiciel Géogébra nous donne le résultat suivant :



1. Justifier que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

> **Corrigé**
>
> Pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a : $f'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}$.
> L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$ est
>
> $$(T)\ :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
>
> Donc ici on obtient :
>
> $$\left\{\begin{array}{ll} f\,(0) & = +2 \\ f'\,(0) & = -1 \end{array}\right| \Rightarrow\ (T)\ :\ y = -1 \times (x-0)\ + 2 \ \Longrightarrow\ \boxed{y = -x+2}$$

2.

2. a. Calculer la dérivée seconde f'' et en déduire la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

> **Corrigé**
>
> Pour tout réel x de $\mathbb{R}$ on a :
>
> $$f''(x) = \,\mathrm{e}^{-x} > 0$$
>
> Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. b. En déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.

> **Corrigé**
>
> f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes, en particulier de T.

3. Calculer l'aire, en unités d'aires, du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. En donner une valeur exacte, puis vérifier la cohérence de votre résultat avec la valeur affichée par Géogébra.

Corrigé

L'aire est donc donnée, en unité d'aire par :

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^2 f(x) - (-x+2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 1 + \mathrm{e}^{-x} + x - 2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \mathrm{e}^{-x} + x - 1\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 \\
&= -\mathrm{e}^{-2} + \frac{2^2}{2} - 2 - (-\mathrm{e}^{0} + \frac{0}{2} - 0) \\
A &= \boxed{1 - \mathrm{e}^{-2} \approx 0,86}
\end{aligned}$$

Exercice 4. Avec une suite — 7 points

Soit n un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$). On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-nx}$$

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

1. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I_1 = 3 - \frac{4}{\mathrm{e}}$.

Corrigé

On pose pour $x \in [0\ ;\ 1]$:

$u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$	$u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$
$v(x) = (x+2)$	$v'(x) = 1$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0\ ;\ 1]$ donc :

$$\int_0^1 u'v = \left[\ uv\ \right]_0^1 - \int_0^1 uv'$$

Soit ici :

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_0^1 \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{u'} \times \underbrace{(x+2)}_{v}\,\mathrm{d}x &= \left[\ uv\ \right]_0^1 - \int_0^1 uv' \\
&= \left[\ -\mathrm{e}^{-x} \times (x+2)\ \right]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x} \times 1\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ -\mathrm{e}^{-x} \times (x+2)\ \right]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x} \times 1\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ -(x+2)\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\ \right]_0^1 \\
&= \left[\ -(x+3)\,\mathrm{e}^{-x}\ \right]_0^1 \\
I_1 &= -(1+3)\,\mathrm{e}^{-1} + (0+3)\,\mathrm{e}^{0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 3 - \frac{4}{\mathrm{e}}}$$

2. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x+2)\,\mathrm{e}^{-nx}\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x$$

Corrigé

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (x+2)\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (x+2)\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (x+2)\,\mathrm{e}^{-(n+1)x} - (x+2)\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (x+2)\,\mathrm{e}^{-nx}\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\boxed{I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x+2)\,\mathrm{e}^{-nx}\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x}$$

3. En déduire le sens de variation de la suite (I_n).

Corrigé

On a montré que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x+2)\,\mathrm{e}^{-nx}\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x$$

Or on a facilement :

$$\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \iff -x \geqslant \ln 1 = 0 \iff x \leqslant 0$$

Sur l'intervalle $[0\;;\;1]$ on a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} (x+2) > 0 \\ \mathrm{e}^{-nx} > 0 \\ \left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) \leqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow (x+2)\,\mathrm{e}^{-nx}\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) \leqslant 0$$

Donc d'après la propriété de positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 (x+2)\,\mathrm{e}^{-nx}\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et la suite (I_n) est décroissante.

4. Démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{3}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)$$

Corrigé

- D'une part, la fonction f_n est positive sur $[0\,;\,1]$ donc $I_n \geqslant 0$.
- D'autre part sur $[0\,;\,1]$, $x + 2 \leqslant 3$ et donc $f_n(x) \leqslant 3\,\mathrm{e}^{-nx}$ puisque $\mathrm{e}^{-nx} > 0$.
- Ainsi, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ et tout réel x de $[0\;;\;1]$:

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 3\,\mathrm{e}^{-nx}$$

D'après la propriété de comparaison de l'intégrale on a alors :

$$0 \leqslant In \leqslant \int_0^1 3\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[\ -3\,\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\ \right]_0^1 = -3\,\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} + 3\,\frac{\mathrm{e}^{0}}{n}$$

Donc, pour tout entier naturel n non nul,

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{3}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)}$$

5. En déduire que la suite (I_n) converge.

Corrigé

On a montré lors de la question précédente que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{3}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)$$

Or

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right) = 1 \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right) = 0 \underset{\text{par th. encadrement}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

Remarque : on pouvait aussi invoquer que la suite (I_n) était décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$. On ne pouvait pas déterminer la limite mais cela suffisait ici.

Fin du devoir