



Math93.com

Devoir Surveillé n°C2

Tle Spécialité

Intégration

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 22 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

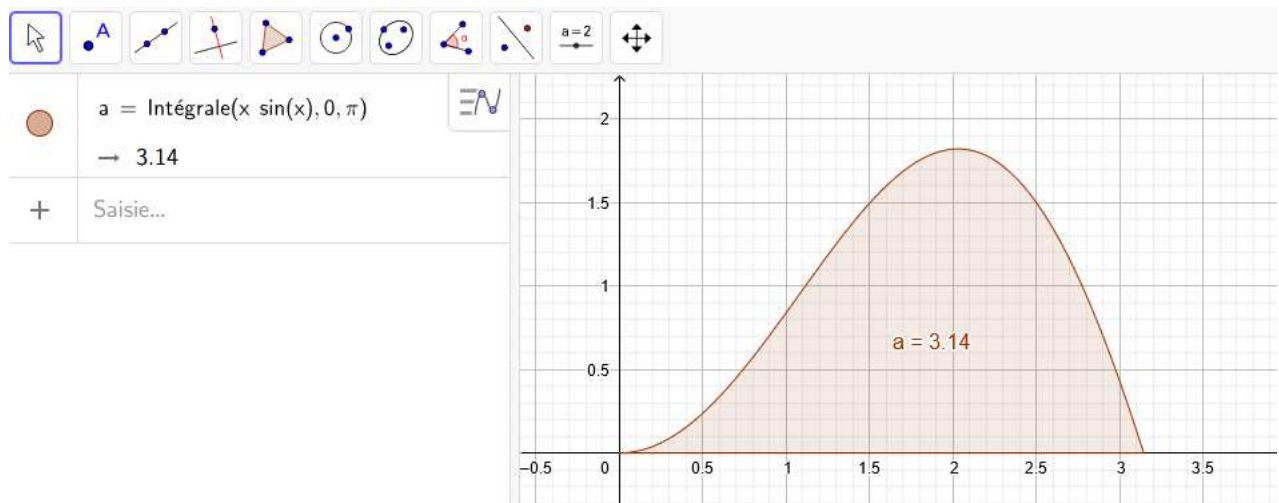
Exercice 1. Calculs d'intégrales

5 points

1. Soit J défini par :

$$J = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

Voici le résultat obtenu pour le calcul de J par le logiciel Géogebra :



A l'aide d'une intégration par partie, calculer la valeur exacte de J et comparer au résultat affiché par Géogebra.

2. Calculer à l'aide d'une double intégration par partie (on pourra s'aider du calcul précédent, ou pas) :

$$K = \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$$

Exercice 2. Une fonction définie à partir d'une intégrale

5 points

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} \, dt$$

1. Calculer g' la dérivée de g sur $[1 ; +\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur $[1 ; +\infty[$.

Aide : c'est du cours...

2. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que :

$$g(x) = 1 - \frac{1 + \ln x}{x}$$

Aide : $\frac{\ln t}{t^2} = \frac{1}{t^2} \times \ln t$

Exercice 3. Aire entre deux courbes

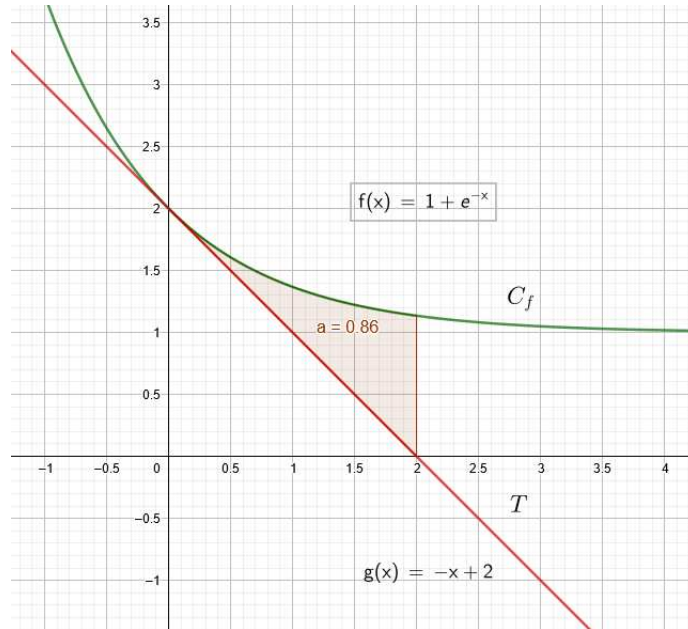
5 points

Soit f la fonction de courbe représentative \mathcal{C}_f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 1 + e^{-x}$$

Soit T la droite d'équation $y = -x + 2$.

L'objectif est de déterminer l'aire délimitée par \mathcal{C}_f , T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Le logiciel Géogébra nous donne le résultat suivant :



1. Justifier que la droite T est tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
2.
 2. a. Calculer la dérivée seconde f'' et en déduire la convexité de la fonction f sur \mathbb{R} .
 2. b. En déduire la position de \mathcal{C}_f par rapport à T .
3. Calculer l'aire, en unités d'aires, du domaine délimité par \mathcal{C}_f , T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. En donner une valeur exacte, puis vérifier la cohérence de votre résultat avec la valeur affichée par Géogébra.

Exercice 4. Avec une suite

7 points

Soit n un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$). On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(x) = (x + 2)e^{-nx}$$

Soit (I_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

1. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $I_1 = 3 - \frac{4}{e}$.
2. Démontrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x + 2)e^{-nx} (e^{-x} - 1) dx$$

3. En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .
4. Démontrer que pour tout entier n de \mathbb{N}^* :

$$0 \leq I_n \leq \frac{3}{n} (1 - e^{-n})$$

5. En déduire que la suite (I_n) converge.

↩ **Fin du devoir** ↪