Math93.com

Devoir Surveillé n°C3

Tle Spécialité

Fonctions trigonométriques

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 42 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Exercice 1. Notion de mesure principale — 4 points

A compléter sur cette feuille

Soit A le point image du nombre réel $a = \dfrac{170\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

1. Donner en détaillant les calculs la mesure principale de a.

....

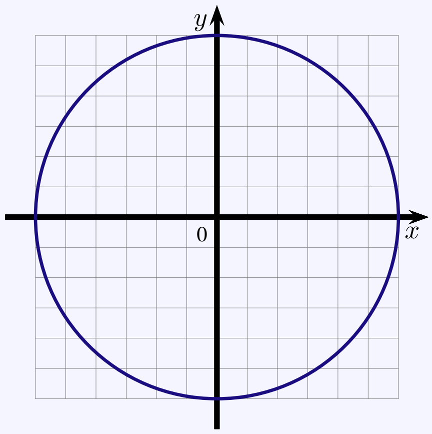
....

....

2. Donner le cosinus et le sinus du réel a.

....

3. Placer le point A sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



Exercice 2. Équations et inéquations trigonométriques — 6 points

1. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ l'équation

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation

$$4\cos^2 x - 3 = 0$$

3. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation

$$\cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 3. Suites et intégrales — 17 points

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier n non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Á l'aide d'une intégration par partie, calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Sens de variation de (I_n).

2. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n\,(x-1)\,\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

2. b. En déduire le sens de variation de la suite (I_n).

3. Limite de (I_n).

3. a. Justifier que pour tout réel x de $[0\,;\,1]$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$0 \leqslant x^n \sin(x) \leqslant x^n$$

3. b. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

3. c. Déterminer alors la limite de la suite (I_n).

4. Étude de (J_n).
On considère la suite (J_n) définie pour tout entier n non nul par :

$$J_n = \int_0^1 x^n \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

4. a. Á l'aide d'une intégration par partie, démontrer que pour tout entier n non nul :

$$I_{n+1} = (n+1)\,J_n - \cos(1)$$

4. b. En déduire la limite de la suite (J_n).

5. La méthode des rectangles.

5. a. Montrer que pour x réel de $[0\,;\,1]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n définies par $f_n(x) = x^n \sin(x)$ sont croissantes.

5. b. Compléter les lignes 10 et 11 de l'algorithme suivant pour qu'il permette de donner une valeur approchée de I_2 par la méthode des rectangles (avec n rectangles).

5. c. Compléter aussi un exemple d'instruction à écrire dans la console afin d'avoir une estimation de I_2.

A compléter sur cette feuille

```
1  from math import sin
2  def f(x):
3      return x**2*sin(x)
4  def aire(f,a,b,n):
5      '''In : f fonction, a et b flottant les bornes
6              et n entier nb de rectangles
7        Out : somme des aires des n rectangles '''
8      somme = 0
9      h=(b-a)/n
10     for k in range(....):
11         somme = somme + ....
12     return somme
```

```
# Dans la console PYTHON
>>> aire(f, ... , ... , ... )
```

Exercice 4. Étude de fonction — 15 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x + \cos^2 x$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Parité.

1. a. Étudier la parité de f.

1. b. Qu'en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

2. Périodicité.

2. a. Montrer que f est 2π-périodique .

2. b. Qu'en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

3. Variations.

3. a. Montrer que pour tout réel x :

$$f'(x) = -\sin x\,(1 + 2\cos x)$$

3. b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ \pi]$.

3. c. Calculer l'image de $\dfrac{2\pi}{3}$ par f.

3. d. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ \pi]$. Vous détaillerez le calcul des valeurs du tableau.

3. e. En déduire les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ (expliquer rapidement la méthode).

4. Courbe représentative de f.

4. a. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[0\ ;\ \pi]$.
En utilisant les questions précédentes, compléter le tracer sur $[-\pi\ ;\ 0]$ (expliquer rapidement la méthode).
Vous ferez aussi figurer les tangentes horizontales.

4. b. Expliquer (sans le faire) comment en déduire la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 3\pi]$.

A compléter sur cette feuille

Fin du devoir