



Math93.com

Devoir Surveillé n°C3

Correction

Tle Spécialité

Fonctions trigonométriques

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 42 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Exercice 1. Notion de mesure principale

4 points



Corrigé

1. Donner en détaillant les calculs la mesure principale de $a = \frac{170\pi}{3}$.

$$\begin{array}{r|l} 170 & 3 \\ -15 & 56 \\ \hline 20 & \\ -18 & \\ \hline 2 & \end{array} \quad \text{soit} \quad 170 = 3 \times 56 + 2$$

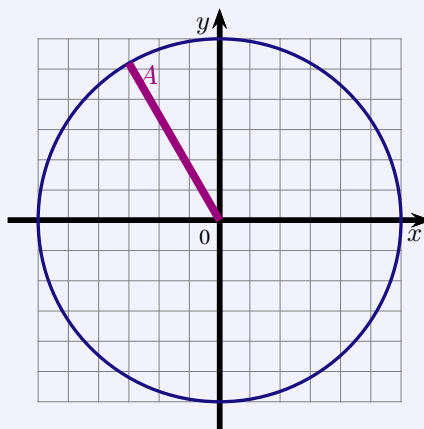
$$a = \frac{170\pi}{3} = \frac{(3 \times 56 + 2)\pi}{3} = 56\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \underbrace{28 \times 2\pi}_{28 \text{ tours}}$$

Donc la mesure principale de a est $\frac{2\pi}{3}$.

2. Donner le cosinus et le sinus du réel a .

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Placer le point A sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



Exercice 2. Équations et inéquations trigonométriques

6 points

1. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; \pi]$ l'équation

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$



Corrigé (2 points)

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \iff \sin 2x = \sin \frac{\pi}{6} \iff \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ on a :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12} ; \frac{5\pi}{12} \right\}$$

2. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'équation

$$4 \cos^2 x - 3 = 0$$



Corrigé (2 points)

$$4 \cos^2 x - 3 = 0 \iff \cos^2 x = \frac{3}{4} \iff \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Soit :

$$4 \cos^2 x - 3 = 0 \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ on a :

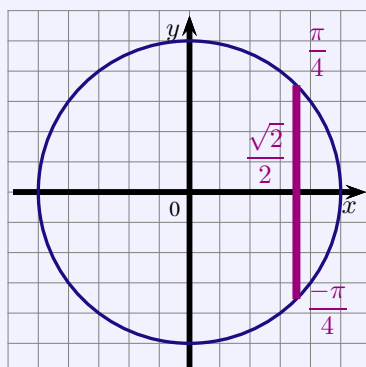
$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{6} ; \frac{-\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}$$

3. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation

$$\cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Corrigé (2 points)



Donc sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ on a :

$$S = \left] \frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} \right[$$

Exercice 3. Suites et intégrales**17 points**

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier n non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \sin(x) \, dx$$

1. À l'aide d'une intégration par partie, calculer $I_1 = \int_0^1 x \sin(x) \, dx$.

**Corrigé (2 points)**

On pose pour $x \in [0 ; 1]$:

$u'(x) = \sin x$	$u(x) = -\cos x$
$v(x) = x$	$v'(x) = 1$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0 ; 1]$ donc :

$$\int_0^1 u'v = [uv]_0^1 - \int_0^1 uv'$$

Soit ici :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \underbrace{\sin x}_{u'} \times \underbrace{x}_v \, dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 uv' \\ &= [-\cos x \times x]_0^1 - \int_0^1 -\cos x \times 1 \, dx \\ &= [-x \cos x + \sin x]_0^1 \\ I_1 &= -\cos 1 + \sin 1 - (-0 \times \cos 0 + \sin 0) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = \sin 1 - \cos 1}$$

2. Sens de variation de (I_n) .

2. a. Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n (x-1) \sin(x) \, dx$$

**Corrigé (1 point)**

Pour tout entier n non nul, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} \sin(x) \, dx - \int_0^1 x^n \sin(x) \, dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1} \sin(x) - x^n \sin(x)) \, dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n (x-1) \sin(x) \, dx$$

2. b. En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .

**Corrigé (2 points)**

On a montré que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n (x-1) \sin(x) \, dx$$

Sur l'intervalle $[0 ; 1]$ on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} x^n \geq 0 \\ (x-1) \leq 0 \\ \sin(x) \geq 0 \end{cases} \implies x^n (x-1) \sin(x) \leq 0$$

Donc d'après la propriété de positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 x^n (x-1) \sin(x) \, dx \leq 0$$

Donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et la suite (I_n) est décroissante.

3. Limite de (I_n) .

3. a. Justifier que pour tout réel x de $[0 ; 1]$ et pour tout n de \mathbb{N}^* on a :

$$0 \leq x^n \sin(x) \leq x^n$$

**Corrigé (1point)**

Pour tout réel x de $[0 ; 1]$ on a :

$$0 \leq \sin x \leq 1$$

Pour tout réel x de $[0 ; 1]$ et pour tout n de \mathbb{N}^* on a $x^n \geq 0$ donc on multiplie chaque membre par ce terme positif ou nul :

$$\boxed{0 \leq x^n \sin(x) \leq x^n}$$

3. b. En déduire que pour tout n de \mathbb{N}^* on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

**Corrigé (2 points)**

Pour tout réel x de $[0 ; 1]$ et pour tout n de \mathbb{N}^* on a :

$$0 \leq x^n \sin(x) \leq x^n$$

Donc en intégrant terme à terme sur $[0 ; 1]$ on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 x^n \sin(x) \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

3. c. Déterminer alors la limite de la suite (I_n) .

**Corrigé (1 point)**

Pour tout n de \mathbb{N}^* on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$$

4. Étude de (J_n) .

On considère la suite (J_n) définie pour tout entier n non nul par :

$$J_n = \int_0^1 x^n \cos(x) \, dx$$

4. a. À l'aide d'une intégration par partie, démontrer que pour tout entier n non nul :

$$I_{n+1} = (n+1) J_n - \cos(1)$$

**Corrigé (2 points)**

On pose pour $x \in [0 ; 1]$ et n entier non nul :

$u'(x) = \sin x$	$u(x) = -\cos x$
$v(x) = x^{n+1}$	$v'(x) = (n+1)x^n$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0 ; 1]$ donc :

$$\int_0^1 u'v = [uv]_0^1 - \int_0^1 uv'$$

Soit ici :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 \underbrace{\sin x}_{u'} \times \underbrace{x^{n+1}}_v \, dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 uv' \\ &= [-\cos x \times x^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 -\cos x \times (n+1)x^n \, dx \\ &= [-\cos x \times x^{n+1}]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n \cos x \, dx \end{aligned}$$

$$I_{n+1} = -\cos 1 + (n+1)J_n$$

$$\boxed{I_{n+1} = (n+1)J_n - \cos(1)}$$

4. b. En déduire la limite de la suite (J_n) .

**Corrigé (2 points)**

Pour tout entier n non nul on a :

$$I_{n+1} = (n+1)J_n - \cos(1) \implies J_n = \frac{I_{n+1}}{n+1} - \frac{\cos 1}{n+1}$$

Or :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{n+1} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos 1}{n+1} = 0 \end{cases} \implies \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0}$$

5. La méthode des rectangles.

5. a. Montrer que pour x réel de $[0 ; 1]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n définies par $f_n(x) = x^n \sin(x)$ sont croissantes.

**Corrigé (2 points)**

Pour x réel de $[0 ; 1]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n définies par $f_n(x) = x^n \sin(x)$ sont dérivables et :

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \sin x + x^n \cos x$$

Pour $n > 0$ et x de $[0 ; 1]$ on a :

$$\begin{cases} nx^{n-1} \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \\ x^n \cos x \geq 0 \end{cases} \implies f'_n(x) \geq 0$$

Pour x réel de $[0 ; 1]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n définies par $f_n(x) = x^n \sin(x)$ sont croissantes.

5. b. Compléter les lignes 10 et 11 de l'algorithme suivant pour qu'il permette de donner une valeur approchée de I_2 par la méthode des rectangles (avec n rectangles).

5. c. Compléter aussi un exemple d'instruction à écrire dans la console afin d'avoir une estimation de I_2 .

**Corrigé (2 points)**

```
for k in range(n) :
    somme = somme + f(a + k * h) * h
>>> aire(f, 0, 1, 1000)
```

A compléter sur cette feuille

```
1 from math import sin
2 def f(x) :
3     return x**2*sin(x)
4 def aire(f, a, b, n) :
5     '''In : f fonction, a et b flottant les bornes
6           et n entier nb de rectangles
7           Out : somme des aires des n rectangles '''
8     somme = 0
9     h=(b-a)/n
10    for k in range(...):
11        somme = somme + ....
12    return somme
```

```
# Dans la console PYTHON
>>> aire(f, ... , ... , ... )
```

Exercice 4. Étude de fonction**15 points**Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \cos x + \cos^2 x$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .**1. Parité.****1. a.** Étudier la parité de f .**Corrigé (1,5 point)**Pour tout réel x :

- **[0,5 pt]** L'ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
- **[1 pt]** Pour tout réel x de $D_f = \mathbb{R}$, on a $(-x) \in D_f$ et :

$$f(-x) = \cos(-x) + \cos^2(-x)$$

or la fonction cosinus est paire (0,5 pt) donc :

$$f(-x) = \cos x + \cos^2 x = f(x)$$

La fonction f est donc paire.**1. b.** Qu'en déduire pour la courbe \mathcal{C}_f ?**Corrigé (0,5 point)**La fonction f est donc paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**2. Périodicité.****2. a.** Montrer que f est 2π -périodique .**Corrigé (1 point)**Pour tout réel x de $D_f = \mathbb{R}$, on a :

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + \cos^2(x + 2\pi)$$

or la fonction cosinus est 2π -périodiques donc :

$$f(x + 2\pi) = \cos x + \cos^2 x = f(x)$$

La fonction f est donc 2π -périodique.**2. b.** Qu'en déduire pour la courbe \mathcal{C}_f ?**Corrigé (1 point)**La fonction f est 2π -périodique donc sa courbe représentative est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.**3. Variations.****3. a.** Montrer que pour tout réel x :

$$f'(x) = -\sin x (1 + 2 \cos x)$$

**Corrigé (1,5 point)**

Pour tout réel x la fonction f est dérivable et :

$$f'(x) = -\sin x + 2 \cos x \times (-\sin x) = -\sin x (1 + 2 \cos x)$$

3. b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; \pi]$.

**Corrigé (3 points)**

- [0,5pt] Sur $[0 ; \pi]$, on a

$$-\sin x \leq 0$$

- [0,5pt] Sur $[0 ; \pi]$, on a

$$-\sin x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \pi$$

- [0,5pt] Sur $[0 ; \pi]$, on a

$$(1 + 2 \cos x) = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{2\pi}{3}$$

- [0,5pt] Sur $[0 ; \pi]$, on a

$$(1 + 2 \cos x) \geq 0 \iff \cos x \geq -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right]$$

- [1pt] Bilan :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
Signe de $-\sin x$	0	-		-	0
Signe de $(1 + 2 \cos x)$		+	0	-	
Signe de $f'(x)$	0	-	0	+	0

3. c. Calculer l'image de $\frac{2\pi}{3}$ par f .

**Corrigé (1 point)**

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

3. d. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; \pi]$. Vous détaillerez le calcul des valeurs du tableau.

**Corrigé 1,5 point)**

On a :

$$f(0) = \cos 0 + \cos^2 0 = 2 \quad ; \quad f(\pi) = \cos \pi + \cos^2 \pi = -1 + 1 = 0$$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
Signe de $f'(x)$	0	-	0
Variations de f	2	$-\frac{1}{4}$	0

3. e. En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$ (expliquer rapidement la méthode).

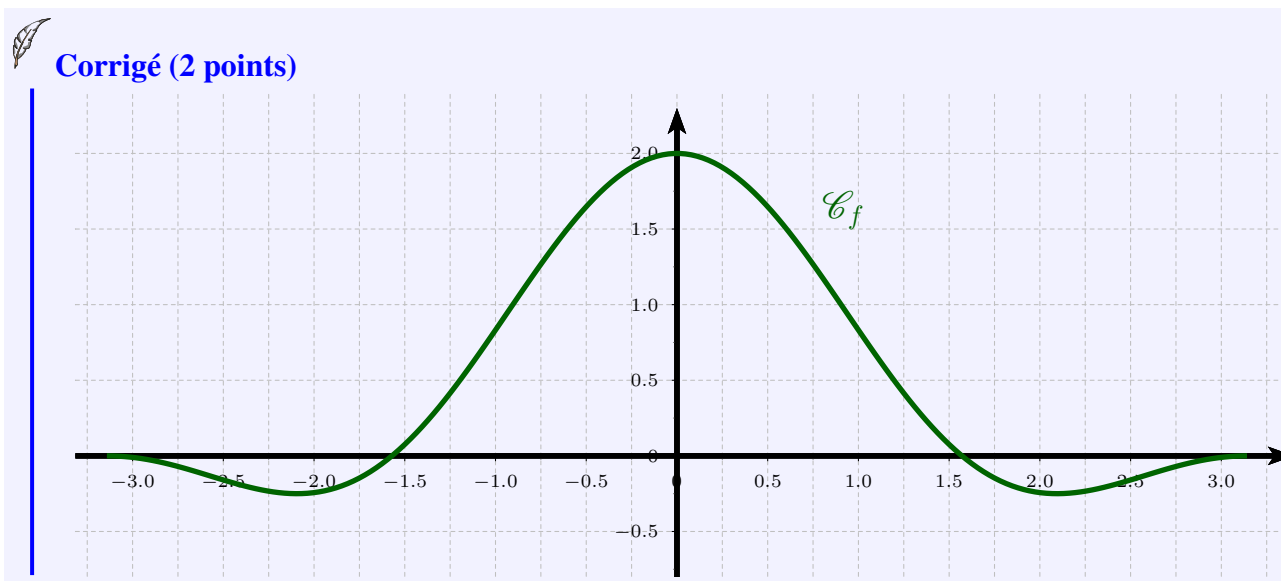
Corrigé (1 point)
 On obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puisque f est paire :

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
Variations de f	0	$-\frac{1}{4}$	2	$-\frac{1}{4}$	0

4. Courbe représentative de f .

- 4. a. On donne ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f sur $[0 ; \pi]$.
 En utilisant les questions précédentes, compléter le tracer sur $[-\pi ; 0]$ (expliquer rapidement la méthode).
 Vous ferez aussi figurer les tangentes horizontales.
- 4. b. Expliquer (sans le faire) comment en déduire la courbe représentative \mathcal{C}_f sur l'intervalle $[-\pi ; 3\pi]$.

Corrigé (1 point)
 Il suffit de faire une translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ de la courbe tracée sur $[-\pi ; \pi]$.



↔ Fin du devoir ↔