Math93.com

Interrogation n°B1

Tle Spécialité

Logarithme

Durée 55 min - Coeff. 4

Noté sur 23 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Avertissement : tous les résultats doivent être dûment justifiés. La rédaction doit être à la fois précise, claire et concise.

Exercice 1. Avec les formules — 2 points

Exprimer en fonction de $\ln 3$ en détaillant les calculs les réels :

1. $a = \ln 81 + \ln 27$

2. $b = \ln\left(9\sqrt{3}\right)$

3. $c = 5\ln(9) + 3\ln\left(\dfrac{1}{3^2}\right)$

Corrigé

1. $a = \ln 81 + \ln 27 = \underline{7\ln 3}$

2. $b = \ln\left(9\sqrt{3}\right) = \dfrac{5}{2}\ln 3$

3. $c = 5\ln(9) + 3\ln\left(\dfrac{1}{3^2}\right) = 4\ln 3$

Exercice 2. Équation — 3 points

Établir rapidement (sans trop détailler) les conditions d'existence puis résoudre avec rigueur l'équation.

$$\ln(x^2-4) - \ln(x+2) = -\ln(x-2)$$

Corrigé

- Il faut que :

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>2 \text{ ou } x<-2 \\ x>-2 \\ x>2 \end{cases} \iff \boxed{x>2}$$

- Pour $x \in I =]2\,;\,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} &\ln(x^2-4) - \ln(x+2) = -\ln(x-2) \\ &\iff \ln(x-2)(x+2) - \ln(x+2) + \ln(x-2) = 0 \\ &\iff \ln(x-2) + \ln(x+2) - \ln(x+2) + \ln(x-2) = 0 \\ &\iff 2\ln(x-2) = 0 \\ &\iff \ln(x-2) = 0 \iff x-2 = 1 \\ &\iff x = 3 \in]2\,;\,+\infty[\end{aligned}$$

- Conclusion : cette équation admet une seule solution $x = 3$.

Exercice 3. Suite (b_n) — 3 points

Suite (b_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$b_n = -7 \times 0,6^n + 5$$

1. Déterminer la limite de la suite (b_n).

2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $b_n > 4,99$.

Corrigé

- On a $q = 0,6 \in]-1\ ;\ 1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0,6^n = 0$.

  De ce fait par produit et somme :

$$\lim_{n\to+\infty} -7 \times 0,6^n = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 5}$$

- Inéquation :

$$\begin{aligned}
-7 \times 0,6^n + 5 > 4,99 &\iff -7 \times 0,6^n > -0,01\\
&\iff 0,6^n < \frac{0,01}{7} = \frac{1}{700} \text{ On compose par la fonction ln strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\\
&\iff \ln 0,6^n < \ln \frac{1}{700} = -\ln 700\\
&\iff n \ln 0,6 < -\ln 700 \text{ On divise par } \ln 0,6 < 0\text{, l'ordre change}\\
&\iff n > \frac{-\ln 700}{\ln 0,6} \approx 12,8
\end{aligned}$$

Et puisque n est entier on a :

$$\boxed{b_n > 4,99 \iff n \geqslant 13}$$

Exercice 4. Inéquations — 5 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes après avoir rapidement déterminé les conditions d'existence.

1. $\ln x + \ln(x-3) < 2\ln 2$.

2. $(\ln x)^2 - \ln x - 6 > 0$.

Corrigé

1. $\underline{\ln x + \ln(x-3) < 2\ln 2}$.

   - Il faut que $x > 3$.
   - Pour $x > 3$ on a :

$$\begin{aligned}
\ln x + \ln(x-3) < 2\ln 2 &\iff \ln x(x-3) < \ln 4 \text{ On compose par la fonction exp strictement croissante sur } \mathbb{R}\\
&\iff x(x-3) < 4\\
&\iff x^2 - 3x - 4 < 0 \text{ expression pol. du 2nd degré, } \Delta = 25 \text{ et les racines } -1 \text{ et } 4\\
&\iff (x+1)(x-4) < 0\\
&\iff \Big(-1 < x < 4\Big) \text{ et } x > 3
\end{aligned}$$

   - Conclusion : $\underline{S =]3\ ;\ 4[}$.

2. $\underline{(\ln x)^2 - \ln x - 6 > 0}$.

   - Il faut que $x > 0$.

- Pour $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
(\ln x)^2 - \ln x - 6 > 0 &\iff \begin{cases} X = \ln x \\ X^2 - X - 6 > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X = \ln x \\ X^2 - X - 6 > 0 \ \text{ expression pol. du 2nd degré, } \Delta = 25 \text{ et les racines } -2 \text{ et } 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X = \ln x \\ (X+2)(X-3) > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X = \ln x \\ X < -2 \ \text{ ou } \ X > 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln x < -2 \ \text{ ou } \ \ln x > 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x > 0 \\ x < \mathrm{e}^{-2} \ \text{ ou } \ x > \mathrm{e}^{3} \end{cases} \\
&\iff \boxed{x \in \left]0 \,;\, \mathrm{e}^{-2}\right[\cup \left]\mathrm{e}^{3} \,;\, +\infty\right[}
\end{aligned}$$

Exercice 5. Limites — 4 points

1. Déterminer les limites en 0^+ et $+\infty$ de la fonction définie sur $I =]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

2. Déterminer les limites en 2^+ et $+\infty$ de la fonction définie $J =]2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$$

Corrigé

1. Limites en 0^+ et $+\infty$ de la fonction définie sur $I =]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$.

- En 0^+.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1}$$

- En $+\infty$.
Pour $x > 0$ on a :

$$g(x) = \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Par ailleurs :

  - D'une part :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 1+\sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0 \ \text{ croissances comparées} \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}} = 0$$

  - D'autre part :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ (fonctions de référence)

– Pour conclure, par produit :

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1\end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$$

2. Déterminer les limites en 2^+ et $+\infty$ de la fonction définie $J =]2\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)$

- En 2^+.

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+} 2x+1 = 5 \\ \lim\limits_{x\to2^+} x-2 = 0^+\end{array}\right. \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{2x+1}{x-2} = +\infty$$

Donc par composition :

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{2x+1}{x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty\end{array}\right. \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty}$$

- En $+\infty$. On a :

$$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$$

En effet :

$$\dfrac{2x+1}{x-2} = \dfrac{2x\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}$$

Et donc par composition :

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-2} = 2 \\ \lim\limits_{X\to2} \ln X = \ln 2\end{array}\right. \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2}$$

Exercice 6. Variations et limites — 6 points

Étudier les variations, et les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction définie par :

1. $h(x) = \dfrac{1}{4}x^2\ (2\ln x - 1)$ sur $I =]0\ ;\ +\infty[$.

2. $k(x) = \ln(\ln x)$ sur $K =]1\ ;\ +\infty[$.

Corrigé

1. $h(x) = \dfrac{1}{4}x^2\ (2\ln x - 1)$ sur $I =]0\ ;\ +\infty[$.

- Variations.

h définie et dérivable sur I. h est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$u(x) = \dfrac{1}{4}x^2$	$u'(x) = \dfrac{1}{2}x$
$v(x) = (2\ln x - 1)$	$v'(x) = \dfrac{2}{x}$

Pour tout réel de I on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2}\,x \times (2\ln x - 1) + \frac{1}{4}\,x^2 \times \frac{2}{x} \\ &= \frac{1}{2}\,x \times (2\ln x - 1) + \frac{1}{2}\,x \\ &= \frac{1}{2}\,x \times 2\ln x \\ h'(x) &= \underline{x\,\ln x} \end{aligned}$$

Donc sur $\mathbb{R}_+^*$, x est strictement positif et h' est du signe de $\ln x$.
On en déduit facilement les variations de h :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
Signe de $h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de h	‖ 0	$\searrow$	$h(1) = -\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Limite en 0^+.

$$h(x) = \frac{1}{4}\,x^2\ (2\ln x - 1) = \frac{1}{2}\,x^2\ \ln x - \frac{1}{4}\,x^2$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ \ln x = 0 \ \text{(croissances comparées)} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{4}\,x^2 = 0 \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0}$$

- Limite en $+\infty$.

$$h(x) = \frac{1}{4}\,x^2\ (2\ln x - 1)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{4}\,x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} (2\ln x - 1) = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty}$$

2. $\boldsymbol{k(x) = \ln(\ln x)}$ **sur** $\boldsymbol{K =]1\ ;\ +\infty[}$**.**

- Variations.
  k définie et dérivable sur $K =]1\ ;\ +\infty[$. la fonction k est de la forme $\ln u$ donc de dérivée u'/u avec :

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$

Pour tout réel de $]1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$k'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$$

Puisque $x > 0$ sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, k' est du signe de $\ln x$ soit :

x	1	$+\infty$
Signe de $\ln x$	||	$+$
Signe de $k'(x)$	||	$+$
Variations de k	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

- Limite en 1^+.

$$k(x) = \ln(\ln x)$$

Par composition :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{array}\right. \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x \to 1^+} k(x) = -\infty}$$

- Limite en $+\infty$. Par composition :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right. \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = +\infty}$$

Fin du devoir