DST N°1 (DURÉE 1 HEURE)

Le barème est donné à titre indicatif.

EXERCICE 1 – 3 PTS (1 + 2)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = u_n + 3n^2 - n$.

1. Pour tout réel *x*, on pose $A(x) = x(x-1)^2 + 3x^2 - x$.

   Développer, réduire et factoriser $A(x)$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $u_n = n(n-1)^2$.

EXERCICE 2 – 5 PTS (0.5 + 2.5 + 0.5 + 1.5)

1. Soit la suite (s_n) définie pour tout entier naturel *n* par

$$s_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

   a. Montrer que pour tout entier naturel *n* non nul, on a $\dfrac{n}{(n+1)!} \geq \dfrac{1}{(n+1)!}$.

   b. En déduire, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n \leq 2 - \frac{1}{n!}.$$

2. Quelle valeur le script python ci-dessous renvoie –t-il quand on exécute `ds1(7)` ?

```
def ds1(n):
  F=1
  i=0
  while i<n:
    i=i+1
    F=F*i
  return F
```

3. Compléter le script ci-dessous, en utilisant la fonction `ds1(n)`, afin que `somme(n)` renvoie s_n.

```
def somme(n):

  S = ....

  for i in range(........):

    S = S + ........

  return S
```

EXERCICE 3 – 4.5 PTS (1 + 0.5 + 1,5 + 1,5)

On donnera les résultats sous forme théorique avant d'effectuer les calculs.

Une grille de loto se présente sous la forme d'une grille de quarante nombres (de 1 à 40) et quatre lettres (A, B, C, D), dans laquelle un joueur coche quatre numéros et deux lettres.

1	6	11	16	21	26	31	36
2	7	12	17	22	27	32	37
3	8	13	18	23	28	33	38
4	9	14	19	24	29	34	39
5	10	15	20	25	30	35	40

A	B	C	D

1. De combien de manières peut-on choisir les quatre numéros ? Les deux lettres ?
2. Combien de grilles peut-on former ?
3. Les nombres sont rangés dans quatre blocs (de1 à10, de 11 à 20, de 21 à 30, de 31 à40).

   Un joueur décide de cocher un numéro par bloc. Combien de grilles peut-on former avec cette contrainte ?
4. Un autre joueur, par superstition (?), décide qu'il doit y avoir au plus un numéro par ligne.

   Combien de grilles peut-on former avec cette contrainte ?

EXERCICE 4 – 3.5 PTS (1 + 1.5 + 1)

On donnera les résultats sous forme théorique et on n'effectuera aucun calcul.

On remplit un damier carré de 16 cases avec les chiffres 0 et 1, comme illustré ci-dessous.

0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0

1. Combien de grilles peut-on former ?
2. Combien de grilles peut-on former, si chaque colonne contient exactement un 1 ?
3. Combien de grilles peut-on former, si chaque colonne contient au plus un 1 ?