CORRIGÉ DU DST N°1

EXERCICE 1

1. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} A(x) &= x(x-1)^2 + 3x^2 - x \\ &= x\left(x^2 - 2x + 1\right) + 3x^2 - x \\ &= x^3 - \cancel{2x^2} + \cancel{x} + \cancel{3x^2} - \cancel{x} \\ &= x^3 + x^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = x^3 + x^2 = x^2(x+1)}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$: « $u_n = n(n-1)^2$ ».

On a $u_0 = 0$ et $0.(0-1) = 0$, donc $P(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie (**HR**). Montrons $P(n+1)$: « $u_{n+1} = n^2(n+1)$ ».

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u_n + 3n^2 - n \quad &\Rightarrow \quad u_{n+1} \underset{(\mathbf{HR})}{=} n(n-1)^2 + 3n^2 - n \\ &\Rightarrow \quad u_{n+1} = A(n) \\ &\Rightarrow \quad u_{n+1} = n^2(n+1), \text{ d'après Q1.} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \ \Rightarrow \ P(n+1).$$

La propriété est vraie au rang 0, et héréditaire à partir de ce rang, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n(n-1)^2}$$

EXERCICE 2

1. $s_n = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = 1.0 + 2.1 + 3.2 + \cdots n.(n-1)$

a. Soit x un nombre réel.

$$\begin{aligned} (x+1)^3 &= (x+1)^2(x+1) \\ &= \left(x^2 + 2x + 1\right)(x+1) \qquad , \\ &= x^3 + x^2 + x + 2x^2 + 2x + x + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $P(n)$: « $s_n \leq \dfrac{n^3}{3}$ ».

On a $s_1 = 1 \times 0 = 0$ et $\dfrac{1^3}{3} = \dfrac{1}{3}$. Or $0 \leq \dfrac{1}{3}$, donc $P(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$: « $s_{n+1} \leq \dfrac{(n+1)^3}{3}$ ».

Observons d'abord que $s_{n+1} = s_n + n(n+1)$.

Or $s_n \leq \dfrac{n^3}{3} \quad \Rightarrow \quad s_n + n(n+1) \leq \dfrac{n^3}{3} + n(n+1)$

$$\Rightarrow \quad s_{n+1} \leq \frac{n^3}{3} + \frac{3n(n+1)}{3}$$

$$\Rightarrow \quad s_{n+1} \leq \frac{n^3 + 3n^2 + 3n}{3}$$

$$\Rightarrow \quad s_{n+1} \leq \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad s_{n+1} \leq \frac{(n+1)^3}{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \quad \Rightarrow \quad P(n+1).$$

La propriété est vraie au rang 1, et héréditaire à partir de ce rang, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, s_n \leq \frac{n^3}{3}}$$

2. Calcul de s_n :

```
def somme(n):
  S = 0
  for i in range (1, n + 1):
    S = S + i*(i-1)
  return S
```

EXERCICE 3

1. On choisit quatre nombres parmi quarante, soit $\boxed{\binom{40}{4} \text{ possibilités}}$.

   On choisit également deux lettres parmi quatre, soit $\boxed{\binom{4}{2}=6 \text{ possibilités}}$.

2. Le nombre de grilles est $\boxed{\binom{40}{4}\times\binom{4}{2}=548340 \text{ possibilités}}$.

3. Le joueur a dix possibilités pour chaque bloc, donc 10^4 possibilités de choisir les quatre chiffres. Par ailleurs, ce joueur a $\binom{4}{2}=6$ choix du bloc lettres. Il y a donc $\boxed{10^4\times6=60\,000}$ grilles possibles.

4. Ce joueur doit choisir les quatre lignes. Il y a $\binom{5}{4}=5$ choix possibilités.

   Pour chaque ligne, il y a 8 numéros possibles.
   Enfin, il y a 6 choix possibles du bloc lettres.

   Le nombre de grilles est $\boxed{\binom{5}{4}\times8^4\times6=122880}$.

EXERCICE 4

1. Une grille est une 16-liste de l'ensemble $\{0,1\}$. Il y a donc 2^{16} grilles possibles.
2. Dans **chaque** colonne, il y a **quatre** possibilités pour placer le 1. Il y a donc $\boxed{4^4 \text{ grilles possibles}}$.
3. Dans **chaque** colonne, il y a quatre possibilités pour placer le 1, et une possibilité supplémentaire sans 1, donc <u>**cinq** possibilités par colonne</u>.

   Il y a donc $\boxed{5^4 \text{ grilles possibles.}}$