Math93.com

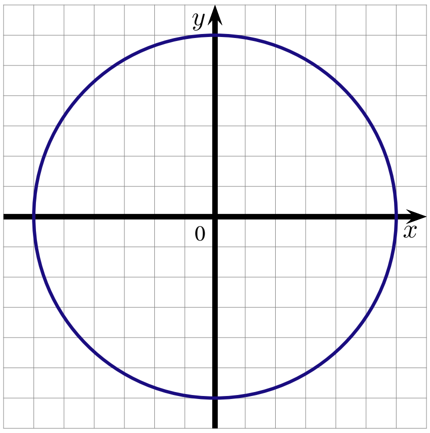
# TD 1 - Tle Spécialité
# Trigonométrie 1 (Rappels)

## Première partie
# Enroulement de la droite des réels

### Exercice 1. Des points sur le cercle trigonométrique

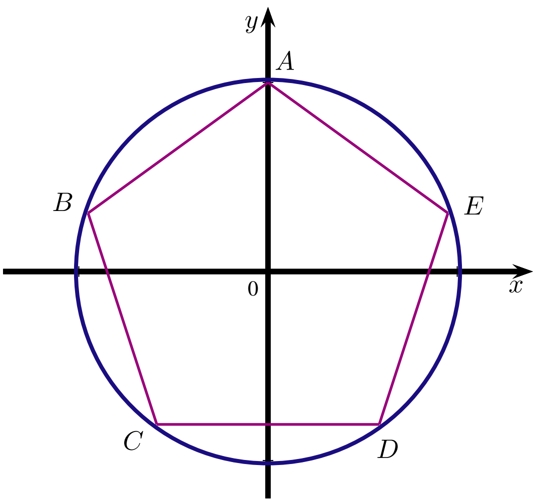
Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D , E et F repérés respectivement par les réels

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}.$$




### Exercice 2. Dans un pentagone

Le pentagone $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.




1. Quelle est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ?
2. À quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce pentagone ?

| Point | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Réel associé dans $]-\pi\,;\,\pi]$ | $\frac{\pi}{2}$ | ...... | ...... | ...... | ...... |

**Réponses**

*Exercice 2*

*(1.)* $\widehat{AB} = \frac{2\pi}{5}$ *(2.)* $B\left(\frac{9\pi}{10}\right)$ ; $C\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$ ; $D\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$ ; $E\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

## Exercice 3. Notion de mesure principale

**Rappels**

1. Par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, on peut associer à tout réel un unique point du cercle.
2. Soit $x$ un réel et M un point du cercle trigonométrique associé au réel $x$, alors le point M est associé à tous les réels de la forme $x + k \times 2\pi$, où $k$ est un entier relatif ,$k \in \mathbb{Z}$ .
3. **Mesure principale**.
Parmi tous les réels de la forme $x + k \times 2\pi$, (où $k$ est un entier relatif) qui sont associés( au point M, on va privilégier celui qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
Dans le repère orthonormé (O ; I ; J), cela correspond en fait au plus petit arc reliant I et M.

**1.** Soit A le point image du nombre réel $\frac{27\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique.

**1. a.** Effectuer la division euclidienne de 27 par 4.

$$\begin{array}{r|l} 2\,7 & 4 \\ \hline 3 & 6 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad 27 = 4 \times \cdots + \cdots$$

**1. b.** Montrer alors que $\frac{27\pi}{4}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{27\pi}{4} = \alpha + k \times 2\pi \quad , \quad \text{avec} \begin{cases} \alpha \in ]-\pi\ ;\ \pi] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**1. c.** Le réel $\alpha$ est alors la mesure principale de $\frac{27\pi}{4}$. Placer le point A sur le cercle trigonométrique.

**2.** Soit B le point image sur le cercle trigonométrique du nombre réel $-\frac{17\pi}{3}$ .

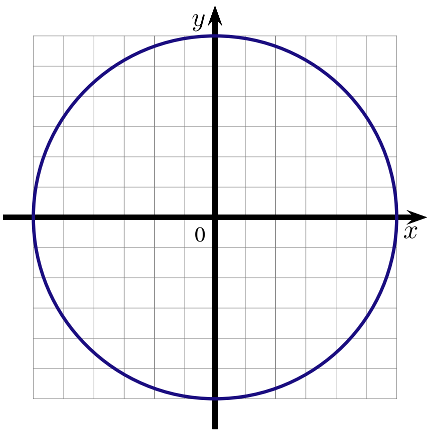
Déterminer la mesure principale du réel $-\frac{17\pi}{3}$, c'est à dire déterminer le réel $\alpha$ de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ qui a le même point image B sur le cercle. Placer B sur le cercle.

**3.** Soit C le point image sur le cercle trigonométrique du nombre réel $\frac{163\pi}{4}$ .

Déterminer la mesure principale du réel $\frac{163\pi}{4}$, c'est à dire déterminer le réel $\alpha$ de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ qui a le même point image C sur le cercle. Placer C sur le cercle.

**4.** Soit D le point image sur le cercle trigonométrique du nombre réel $\frac{1045\pi}{3}$ .

Déterminer la mesure principale du réel $\frac{1045\pi}{3}$ et placer D sur le cercle.

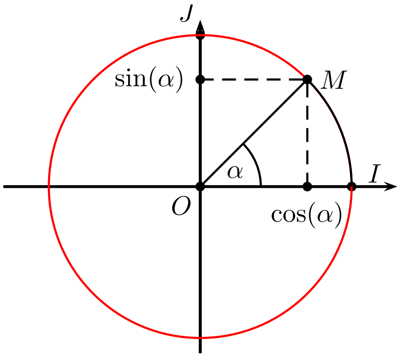


**Réponses**

*1°) et 2°)* $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ ; $B\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ *; corrigé en vidéo ; 3°)* $C\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ *corrigé en vidéo*

### Deuxième partie

# Cosinus et sinus d'un réel




| Angle en degré | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Angle en radian $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ |
| $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | Non défini | 0 |

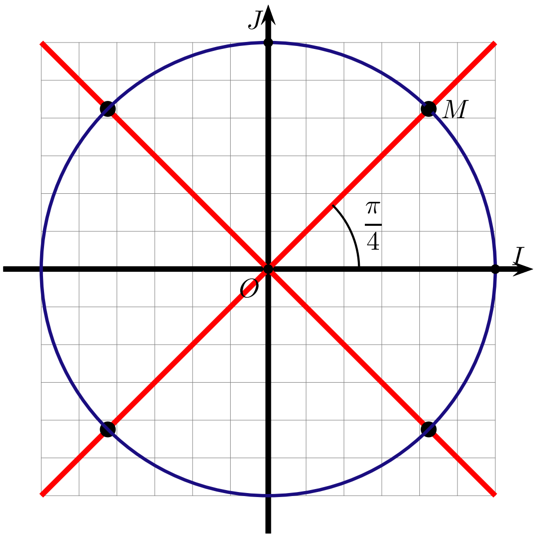
## Exercice 4. Sinus et cosinus d'angles remarquables : à partir de $\frac{\pi}{4}$

**1.** On sait qu'un angle $\frac{\pi}{4}$ radian correspond à un angle de 45 degré. Cela nous permet de placer facilement le point M du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{4}$. Il suffit de prendre le point du cercle qui est sur la première bissectrice du repère (O ; I ; J). On a construit ce point M.

**2.** Placer les points A, B et C du cercle trigonométrique associés aux réels :

$$\frac{3\pi}{4}\,;\ -\frac{\pi}{4}\,;\ -\frac{3\pi}{4}.$$

**3.** Donner les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels précédents.

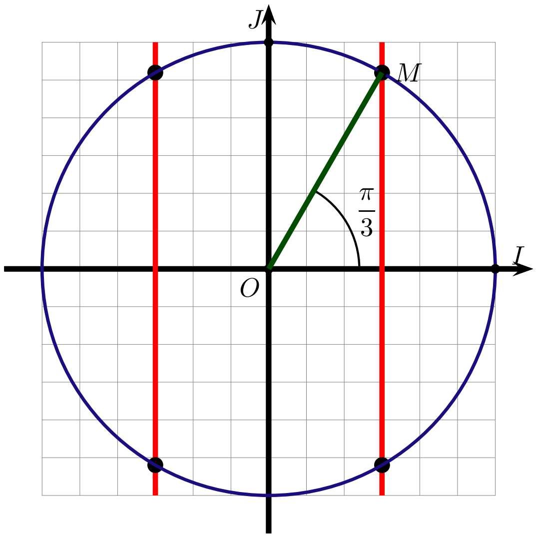



$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \end{cases}$$

## Exercice 5. Sinus et cosinus d'angles remarquables : à partir de $\frac{\pi}{3}$

1. On sait que le cosinus de $\frac{\pi}{3}$ vaut $\frac{1}{2}$ et cela nous permet de placer facilement le point M du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{3}$. Il suffit de prendre le point du cercle d'abscisse 0,5. On a placé ce point M.




2. En utilisant la méthode de construction de l'hexagone régulier et des symétrie évidentes, placer les points A, B et C du cercle trigonométrique associés aux réels :

$$\frac{2\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{3}\,;-\frac{2\pi}{3}.$$

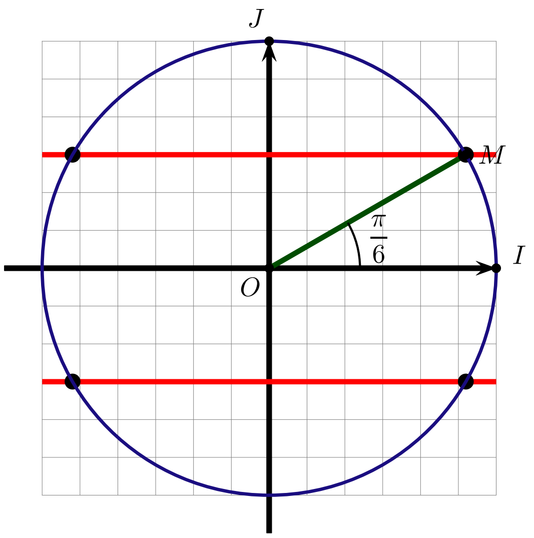
3. Donner les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels précédents.

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\\ \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\end{cases}$$

## Exercice 6. Sinus et cosinus d'angles remarquables : à partir de $\frac{\pi}{6}$

1. On sait que le sinus de $\frac{\pi}{6}$ vaut $\frac{1}{2}$ et cela nous permet de placer facilement le point M du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{6}$. Il suffit de prendre le point du cercle d'ordonnée 0,5. On a placé ce point M.




2. En utilisant des symétrie évidentes, placer les points A, B et C du cercle trigonométrique associés aux réels :

$$\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\,;-\frac{5\pi}{6}.$$

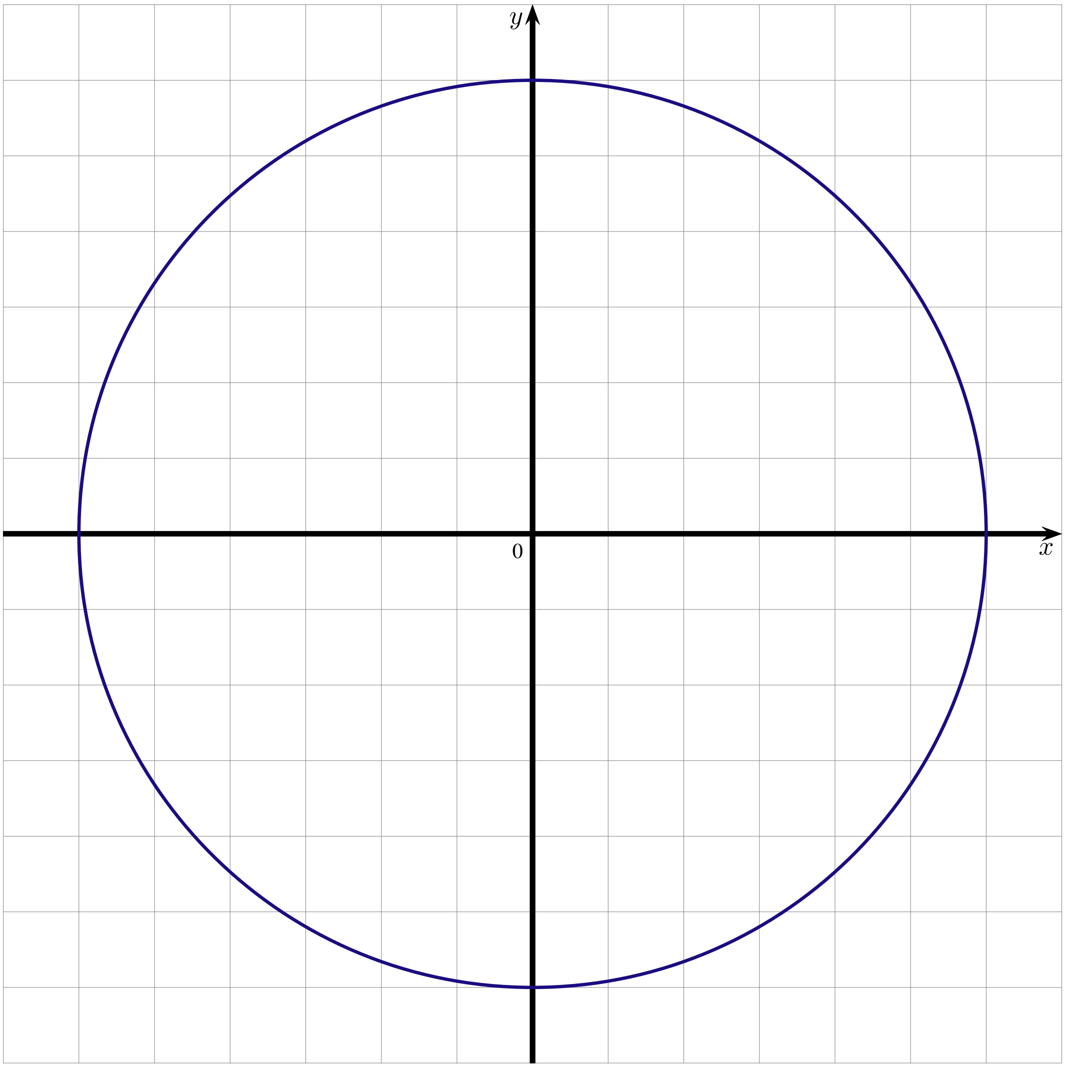
3. Donner les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels précédents.

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\\ \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\end{cases}$$

## Exercice 7. Des points sur le cercle trigonométrique, et leurs coordonnées

**1.** Placer sur le cercle trigonométrique les points $A$, $B$, $C$ et $D$ repérés respectivement par les réels $-\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.

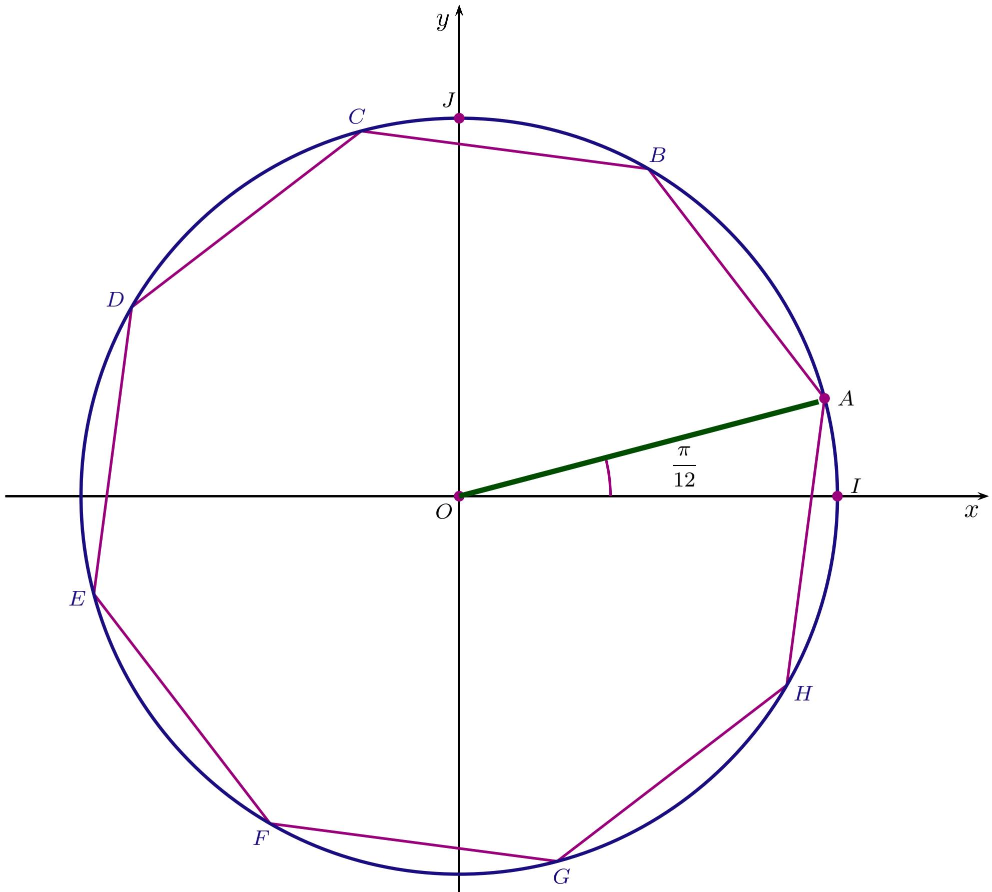



**2.** Donner les coordonnées des quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$.

**Réponses**
*(2.)* $A\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ; $B\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; $C\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ ; $D\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

## Exercice 8. Octogone : Un polygone régulier ABCDEFGH

Sur le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé $(\mathrm{O}; I, J)$, on a tracé l'octogone $ABCDEFGH$ , un polygone régulier à huit côtés.




Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, le point $A$ est associé au réel $\frac{\pi}{12}$.

Le polygone régulier ABCDEFGH ayant des angles au centre égaux à $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, le point $B$ est associé au réel : $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$.

**1.** Compléter le tableau suivant :

| Point | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Réel associé dans $]-\pi\,;\,\pi]$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{3}$ | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... |

**2.** Donner les valeurs exactes des coordonnées du point $B$.

**3.** On donne $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

**3. a.** Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

**3. b.** En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus des réels $\frac{11\pi}{12}$ et $\frac{13\pi}{12}$.

**Réponses**

*(1.)* $\frac{7\pi}{12}\,;\,\frac{5\pi}{6}\,;\,-\frac{11\pi}{12}\,;\,-\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{5\pi}{12}\,;\,-\frac{\pi}{6}$ *(2.)* $B\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *(3.a.)* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

*(3.b.)* $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ; $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ; $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ; $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

# Troisième partie
# Équations trigonométriques

## Exercice 9. Équations trigonométriques

Dans chaque cas, déterminer les réels $x$ tels que :

**1.** $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \,]-\pi;\pi]$

**2.** $\sin x = \dfrac{1}{2}$ et $x \in [0;\pi]$

## Exercice 10. Équations trigonométriques

Résoudre dans l'intervalle $]0\ ;\ \pi]$ l'équation

$$4\cos^2 x - 3 = 0$$

## Exercice 11. Équations trigonométriques (c)

Soit $x$ un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ tel que $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Calculer $\cos x$.

## Exercice 12. Équations

**1.** Soit pour $X$ réel l'expression du second degré

$$A(X) = X^2 - X - \frac{3}{4}$$

**1. a.** Par la méthode de votre choix, montrer que la forme canonique de $A(X)$ est :

$$A(x) = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

**1. b.** Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(X) = 0$.

**2.** En déduire les solutions dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ de l'équation :

$$\sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

**Remarque**

$\sin^2 x = \Big(\sin x\Big)^2$

**Réponses**

- *Exercice 9* : *(1.)* $x = \dfrac{3\pi}{4}$ *ou* $x = -\dfrac{3\pi}{4}$ *(2.)* $x = \dfrac{5\pi}{6}$ *ou* $x = \dfrac{\pi}{6}$
- *Exercice 10* : $x = \dfrac{5\pi}{6}$ *ou* $x = \dfrac{\pi}{6}$ *sur* $]0\ ;\ \pi]$
- *Exercice 12* : *(1.)* $X = -\dfrac{1}{2}$ *ou* $X = \dfrac{3}{2}$ *(2.)* $S = \left\{-\dfrac{\pi}{6}\ ;\ -\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

# Correction

## Correction de l'exercice 11

**Soit $x$ un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculer $\cos x$.**

On utilise la relation, pour tout réel $x$ :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \iff \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

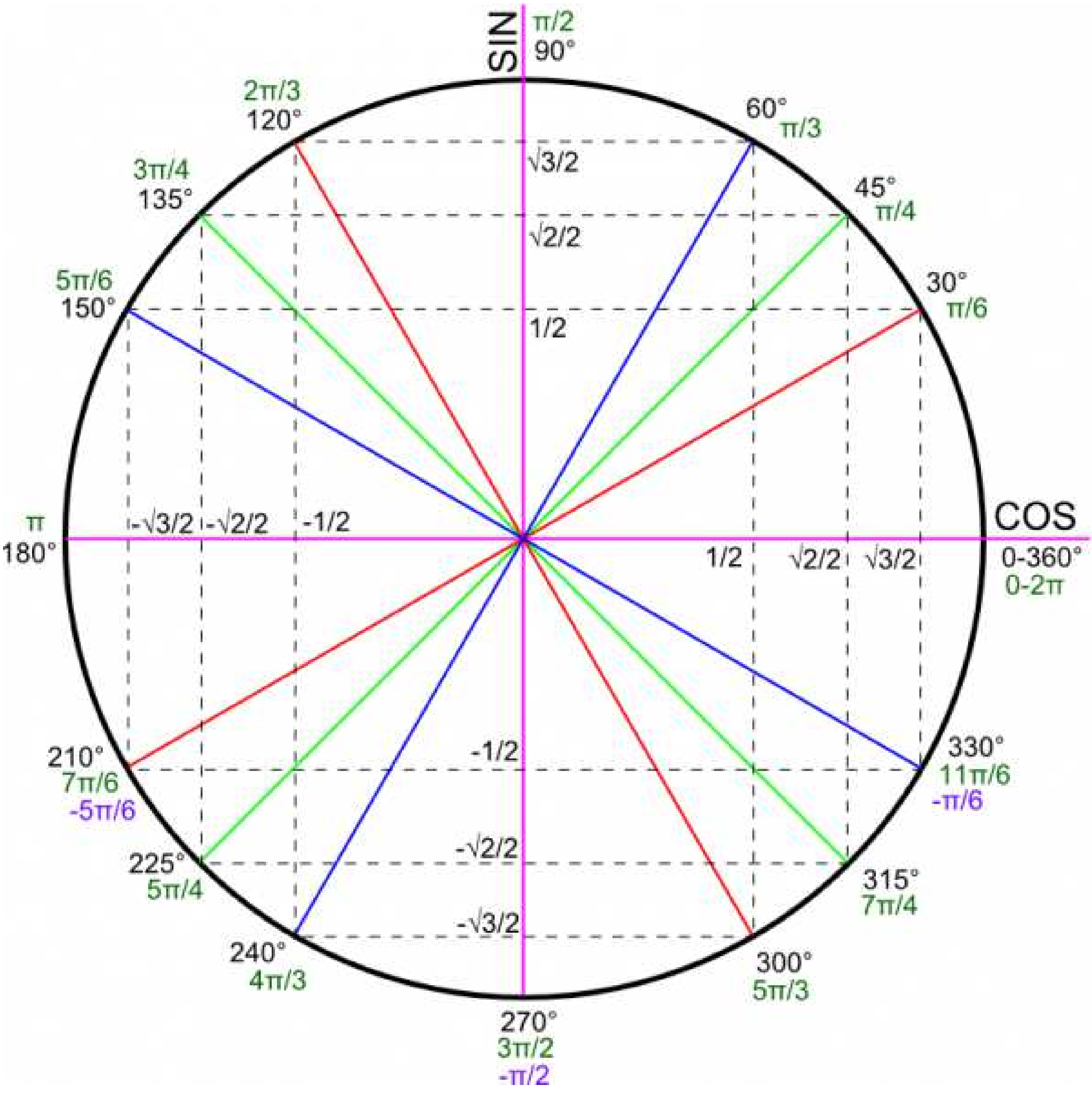
Ce qui nous donne puisque $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ :

$$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \text{ou} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

or $x$ est un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$, ce qui implique que son cosinus est négatif, de ce fait :

$$\boxed{\cos x = -\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

# Annexe


SIN
π/2
90°
2π/3
120°
60°
π/3
√3/2
3π/4
135°
45°
π/4
√2/2
5π/6
150°
30°
π/6
1/2
π
180°
-√3/2
-√2/2
-1/2
COS
1/2
√2/2
√3/2
0-360°
0-2π
210°
7π/6
-5π/6
-1/2
330°
11π/6
-π/6
225°
5π/4
-√2/2
315°
7π/4
-√3/2
240°
4π/3
300°
5π/3
270°
3π/2
-π/2