Math93.com

TD 2 - Terminale Spécialité
Fonctions trigonométriques 2

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD. Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Première partie
Étudier le signe d'une expression trigonométrique

Exercice 1. Inéquations (c)

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis sur $[0\ ;\ 2\pi[$ les inéquations suivantes :

1. $\cos x > 0$
2. $\sin(x)\cos(x) < 0$
3. $\sin(x) < \dfrac{1}{2}$
4. $\cos(x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\sin(x) > \cos(x)$

Exercice 2. Etude de signe (c)

Déterminer le signe de $(2\cos x + 1)$ sur $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis sur $[0\ ;\ 2\pi[$.

Deuxième partie
Étudier une fonction trigonométrique sur $[0\ ;\ \pi]$

Exercice 3.

Soit f une fonction définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par :

$$f(x) = (1 - \cos x)\sin x$$

1. Calculer la dérivée de f.
2. Montrer que pour tout réel de $[0\ ;\ \pi]$ on a :

$$f'(x) = (1 + 2\cos x)(1 - \cos x)$$

3. En déduire les variation de f sur $[0\ ;\ \pi]$.
4. Construire la courbe représentative de f sur $[0\ ;\ \pi]$.

Réponses

$f'(x) = \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x$; *f croissante sur* $\left[0\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$

Troisième partie
Étudier une fonction trigonométrique sur $\mathbb{R}$

Exercice 4. Prolongement de l'exercice 3

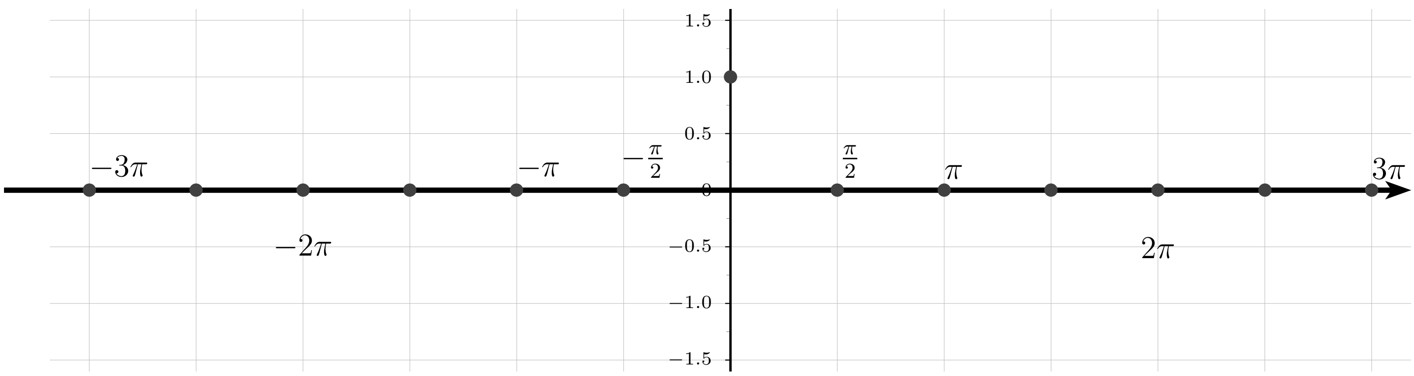
On reprend la fonction de l'exercice 3 mais sur $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 - \cos x) \sin x$$

On a montré que sur $[0\ ;\ \pi]$:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$3\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

1. Étudier la parité de f. En déduire les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ et construire la courbe représentative de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ sur le graphique ci-dessous.
2. Étudier la périodicité de f. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ et construire la courbe représentative de f sur $[-3\pi\ ;\ 3\pi]$ sur le graphique ci-dessous.



Exercice 5. Étude d'une fonction (c)

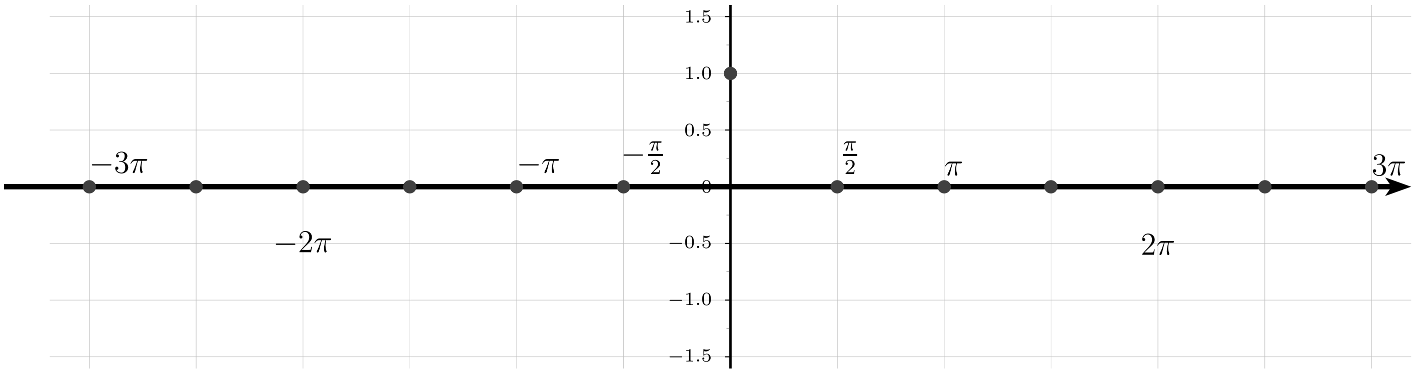
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 + \cos x) \sin x$$

1. Étudier la parité et la périodicité de f.
2. Montrer que pour tout réel de $\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = (1 + \cos(x))(2\cos(x) - 1)$$

3. En déduire les variation de f sur $[0\ ;\ \pi]$ puis sur $[-3\ ;\ 3\pi]$ en utilisant les résultats de la question 1.
4. Construire la courbe $\mathscr{C}_1$, restriction de la courbe représentative de f sur $[0\ ;\ \pi]$.
5. Expliquer comment tracer $\mathscr{C}_f$ sur $[-3\ ;\ 3\pi]$ et faite-le.



Réponses

f est $2\pi-$périodique et impaire. f croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$ *et décroissante sur* $\left[\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$

Exercice 6. Une fraction trigonométrique (c)

Méthode

Lors de l'étude d'une équation trigonométrique il faut être très vigilant sur le **domaine de définition**.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{1+\cos x}{1-\cos 2x} = 1$$

Exercice 7. Étude d'une fonction (c)

Soit f la fonction définie sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{-1}{2}\cos 2x + \cos x + \frac{3}{2}$$

1. Étudier la parité de f
2. Calculer les valeurs exactes de : $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f(\pi)$.
3. Déterminer et factoriser la dérivée de f.
   Aide : on rappelle que pour tout réel x on a : $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.
4. Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation :
   $$(\sin x)(2\cos x - 1) = 0$$
5. Calculer les valeurs exactes de : $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire le tableau de variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.
6. Tracer le graphe de f.

Exercice 8. Optimisation

Le but de cet exercice est de chercher de deux façons différentes le minimum de la fonction g définie sur $]-\pi\,;\,\pi[$ par :

$$g(x)=\frac{2\cos x-6\sin x+8}{1+\cos x}$$

Méthode 1

1. Exprimer $(\sin x-\cos x)$ en fonction de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.
2. En déduire les solutions sur $]-\pi\,;\,\pi[$ de l'équation $(\sin x-\cos x)=1$.
3. déterminer la dérivée de g sur $]-\pi\,;\,\pi[$.
4. Résoudre $g'(x)=0$ et étudier les variations de g.
5. Conclure sur le minimum de g.

Méthode 2

1. Écrire $g(x)$ sous la forme $f(t)$ où $t=\tan\frac{x}{2}$.
2. Déterminer le minimum de f.
3. Conclure sur le minimum de g.

Exercice 9. Fonction trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sin(x)\cos(x)-\sin(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que la fonction f est impaire.

b. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. a. Montrer que f est périodique, de période 2π.

b. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$?

3. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x)=2\cos^2(x)-\cos(x)-1.$$

4. a. Factoriser $2X^2-X-1$, puis $f'(x)$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\pi]$.

5. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;\pi]$.

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-\pi\,;3\pi]$ en détaillant la démarche. Unités graphiques : 3 cm représentent π sur l'axe des abscisses et 2 cm représentent 1 sur l'axe des ordonnées.

Corrections

Correction de l'exercice 1

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$:

1. $\cos x > 0 \iff x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$
2. $\sin(x)\cos(x) < 0 \iff x \in\in \left]\dfrac{-\pi}{2}\ ;\ 0\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$
3. $\sin(x) < \dfrac{1}{2} \iff x \in \left]-\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$
4. $\cos(x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in \left]-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right[$
5. $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left]-\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$
6. $\sin(x) > \cos(x) \iff x \in \left]-\pi\ ;\ -\dfrac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \pi\right]$

Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi[$:

1. $\cos x > 0 \iff x \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left[\dfrac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right[$
2. $\sin(x)\cos(x) < 0 \iff x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right[$
3. $\sin(x) < \dfrac{1}{2} \iff x \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{6}\ ;\ 2\pi\right[$
4. $\cos(x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{7\pi}{4}\ ;\ 2\pi\right[$
5. $\sin(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ 2\pi\right]$
6. $\sin(x) > \cos(x) \iff x \in \left]\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{5\pi}{4}\right[$

Correction de l'exercice 2

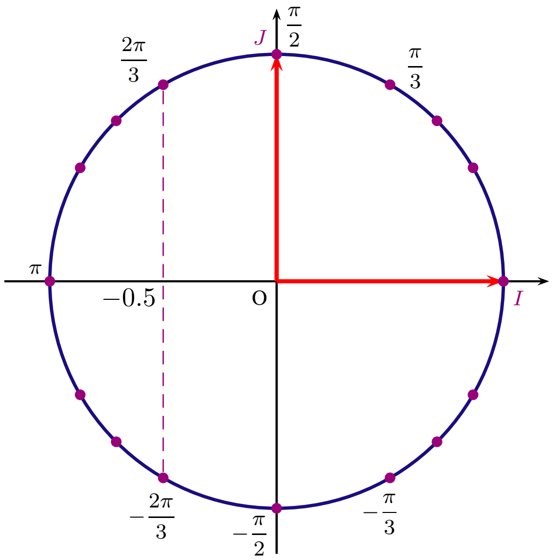
$$2\cos x + 1 > 0 \iff \cos x > -0,5$$

- <u>Sur $]-\pi\ ;\ \pi]$</u> :

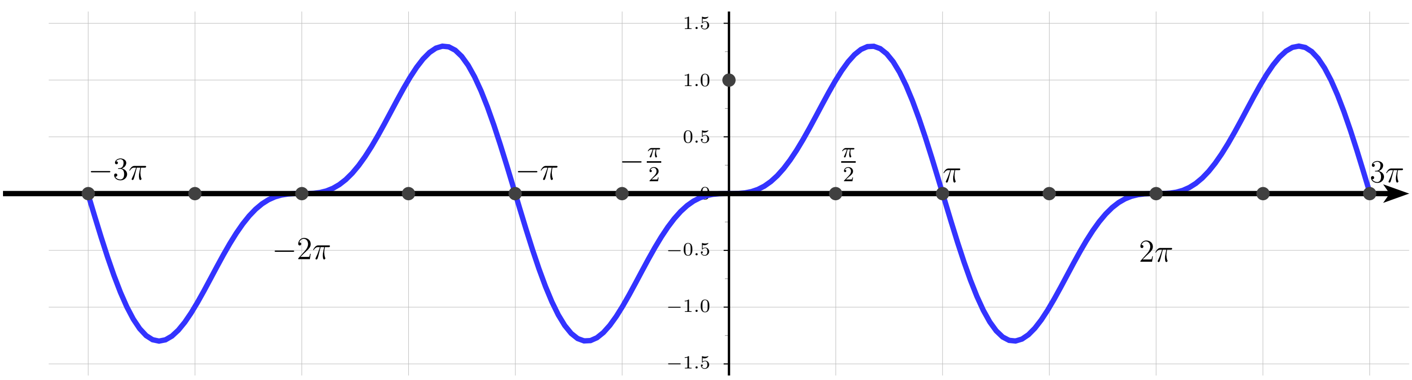
$$\begin{cases} \cos x > -0,5 \iff x \in \left]-\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right[\\ \cos x < -0,5 \iff x \in \left]-\pi\ ;\ -\dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\right] \end{cases}$$

- <u>Sur $[0\ ;\ 2\pi[$</u> :

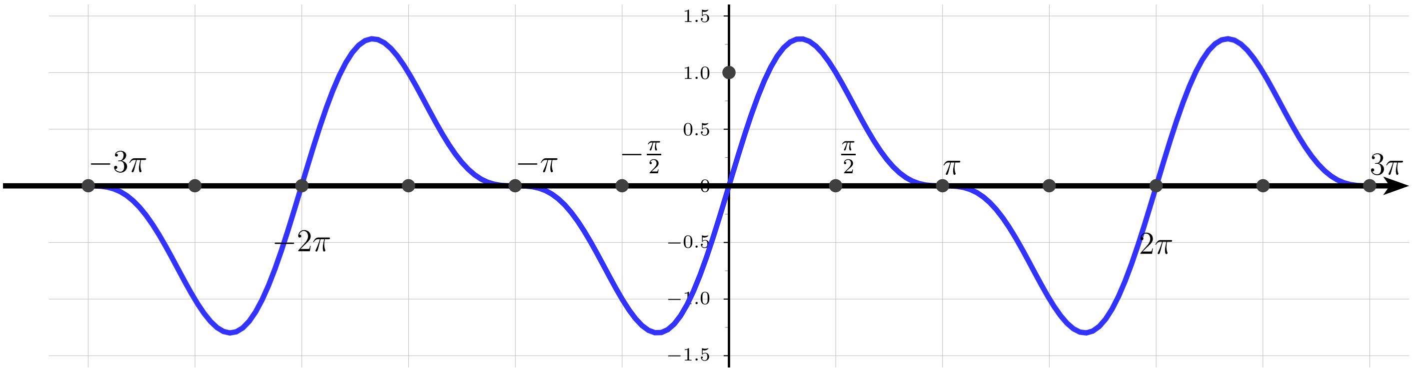
$$\begin{cases} \cos x > -0,5 \iff x \in \left[0\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{4\pi}{3}\ ;\ 2\pi\right[\\ \cos x < -0,5 \iff x \in \left]\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \dfrac{4\pi}{3}\right[\end{cases}$$



Correction de l'exercice 4



Correction de l'exercice 5



Correction de l'exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{1+\cos x}{1-\cos 2x}=1$$

- L'équation est définie si et seulement si :

$$1-\cos 2x \neq 0 \iff x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble de définition est composé des réels privé des $k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, soit :

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

- On a alors pour tout $x \in D_f$:

$$\begin{aligned}
\frac{1+\cos x}{1-\cos 2x}=1 &\iff \frac{1+\cos x}{1-\cos 2x}-1=0\\
&\iff \frac{1+\cos x-1+\cos 2x}{1-\cos 2x}=0\\
&\iff \cos x+\cos 2x=0 \quad \Big(\text{ et } x\neq k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\Big)\\
&\iff \cos x=-\cos 2x \quad \Big(\text{ et } x\neq k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\Big)\\
&\iff \cos x=\cos(\pi-2x) \quad \Big(\text{ et } x\neq k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\Big)\\
&\iff \begin{cases} x=\pi-2x+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\ \quad\text{ou}\\ x=-\pi+2x+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\ \quad\text{et}\\ x\neq k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 3x=\pi+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\ \quad\text{ou}\\ -x=-\pi+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\ \quad\text{et}\\ x\neq k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+2k\frac{\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z}\\ \quad\text{ou}\\ x=\pi+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\ \quad\text{et}\\ x\neq k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}
\end{aligned}$$

Or puisque $x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, cela exclu les solutions de la forme $x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1+\cos x}{1-\cos 2x} = 1 \iff \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\dfrac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{et} \\ x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

On pourrait s'arrêter ici mais pour plus de rigueur on peut écrire les solutions possibles :

$$\begin{aligned} \frac{1+\cos x}{1-\cos 2x} = 1 &\iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \ ; \ x = \dfrac{3\pi}{3} = \pi \ ; \ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi \ ; \ x = \dfrac{6\pi}{3} = 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{3} - 2\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{-\pi}{3} \ ; \ x = \dfrac{\pi}{3} - 4\dfrac{\pi}{3} = -\pi \ ; \ x = \dfrac{\pi}{3} - 6\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - 2\pi \\ \text{et} \\ x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \ ; \ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi \ ; \ x = -\dfrac{\pi}{3} + 4\pi \ ; \ x = -\dfrac{\pi}{3} + 6\pi \cdots \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-\pi}{3} \ ; \ x = \dfrac{\pi}{3} - 2\pi \ ; \ x = \dfrac{\pi}{3} - 4\pi \cdots \end{cases} \end{aligned}$$

- Conclusion : les solution sont les réels :

$$\boxed{x \in \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Correction de l'exercice 7 page 3

Soit f la fonction définie sur $[-\pi \ ; \ \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{-1}{2}\cos 2x + \cos x + \frac{3}{2}$$

1. **Étudier la parité de f.**
   - L'ensemble de définition $D_f = [-\pi \ ; \ \pi]$ est symétrique par rapport à 0.
   - Pour tout réel x de $D_f = [-\pi \ ; \ \pi]$, on a $(-x) \in D_f$ et :

   $$f(-x) = \frac{-1}{2}\cos(-2x) + \cos(-x) + \frac{3}{2}$$

   or la fonction cosinus est paire donc :

   $$f(-x) = \frac{-1}{2}\cos 2x + \cos x + \frac{3}{2} = f(x)$$

   La fonction f est donc paire.
   - La fonction f est donc paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   - On étudiera donc f sur l'intervalle $[0 \ ; \ \pi]$ puis on complètera le graphe par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

2. **Calculer les valeurs exactes de : $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $f(\pi)$.**

   $$\boxed{f(0) = 2} \ ; \ \boxed{f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{4}} \ ; \ \boxed{f(\pi) = 0}$$

3. **Déterminer et factoriser la dérivée de f.**

   Pour tout réel x de $D_f = [-\pi \ ; \ \pi]$ on a :

   $$f'(x) = \sin 2x - \sin x = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$$

   $$\boxed{f'(x) = \sin x(2\cos x - 1)}$$

4. Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation : $(\sin x)(2\cos x - 1) = 0$

$$(\sin x)(2\cos x - 1) = 0 \iff \begin{cases} \sin x = 0 \iff x = k\pi \\ \\ \text{ou} \\ \\ 2\cos x - 1 = 0 \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \end{cases} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Donc sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ les solutions sont :

$$\boxed{S = \left\{-\pi\ ;\ -\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right\}}$$

5. Calculer les valeurs exactes de : $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. En déduire le tableau de variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

$$\boxed{f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) > 0}\ ;\ \boxed{f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0}$$

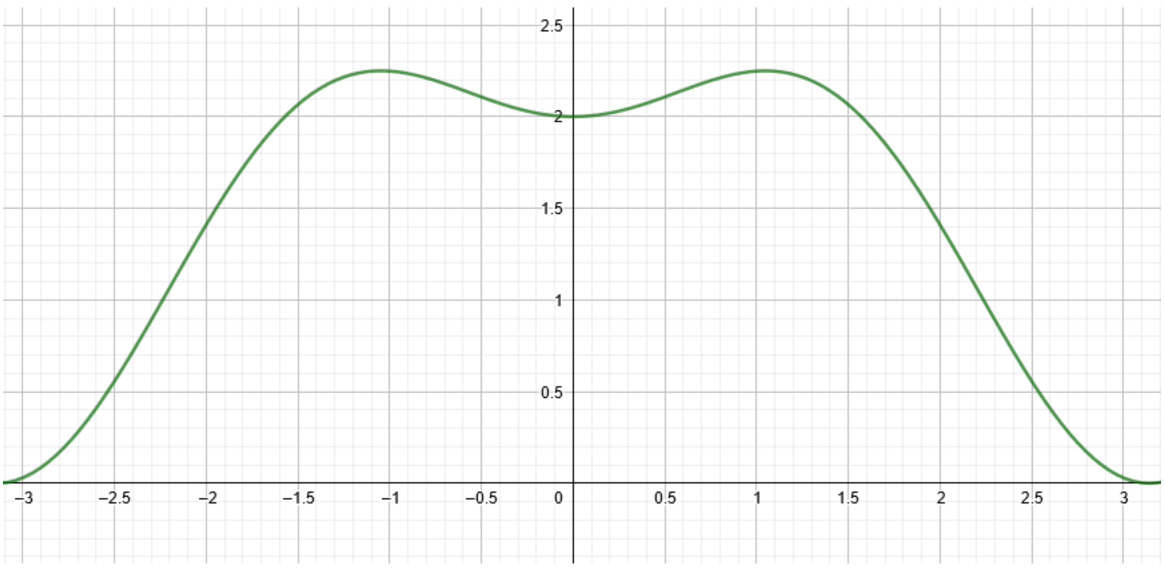
Cela nous donne les variations de f sur $[0\ ;\ \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
Variations de f	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0

Puis en utilisant le fait que la fonction soit paire, sur $[-\pi\ ;\ \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0

6. Tracer le graphe de f.



Correction de l'exercice 9 page 4

1. Parité.

1. a. Montrer que f est impaire.

- L'ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
- Pour tout réel x de $D_f = \mathbb{R}$, on a $(-x) \in D_f$ et :

$$f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) - \sin(-x)$$

or les fonctions sinus et cosinus sont respectivement impaire et paire donc :

$$f(-x) = -\sin(x)\cos(x) - (-\sin(x)) = -\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = -f(x)$$

La fonction f est donc impaire.

1. b. La fonction f est donc impaire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2. Périodicité.

2. a. Montrer que f est 2π-périodique.
Pour tout réel x de $D_f = \mathbb{R}$, on a :

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi)\cos(x + 2\pi) - \sin(x + 2\pi)$$

or les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques donc :

$$f(x + 2\pi) = \sin(x)\cos(x) - \sin(x) = f(x)$$

La fonction f est donc 2π-périodique.

2. b. La fonction f est 2π-périodique donc sa courbe représentative est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

3. Montrer que : $f'(x) = 2\cos^2 x - \cos x - 1$.
Pour tout réel x, la fonction f est dérivable et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \cos x + \sin x(-\sin x) - \cos x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 2\cos^2 x - \cos x - 1}$$

4.

4. a. Factoriser $2X^2 - X - 1$, puis $f'(x)$.
L'expression $\left(2X^2 - 1X - 1\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(aX^2 + bX + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta = 9 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $X \longmapsto \left(2X^2 - 1X - 1\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{4} = -0.5 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{4} = 1$$

De ce fait :

$$2X^2 - X - 1 = 2(X + 0,5)(X - 1)$$

Et donc puisque pour tout réel x on a montré que $f'(x) = 2\cos^2 x - \cos x - 1$, en posant $X = \cos x$ on obtient :

$$\boxed{f'(x) = 2(\cos x + 0,5)(\cos x - 1)}$$

4. b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ \pi]$.

- D'une part sur $[0\ ;\ \pi]$:

$$\begin{aligned}\cos x + 0,5 = 0 &\iff \cos x = -0,5\\ &\iff \begin{cases}\cos x = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ \text{et } \ x \in [0\ ;\ \pi]\end{cases}\\ &\iff x = \dfrac{2\pi}{3} \in [0\ ;\ \pi]\end{aligned}$$

- D'autre part sur $[0\ ;\ \pi]$:

$$\begin{aligned}\cos x + 0,5 > 0 &\iff \cos x > -0,5\\ &\iff \begin{cases}\cos x > \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ \text{et } \ x \in [0\ ;\ \pi]\end{cases}\\ &\iff x \in \left[0\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right[\end{aligned}$$

- D'une part sur $[0\ ;\ \pi]$:

$$\begin{aligned}\cos x - 1 = 0 &\iff \cos x = 1\\ &\iff \cos x = \cos(0) \ \text{ et } \ x \in [0\ ;\ \pi]\\ &\iff x = 0 \in [0\ ;\ \pi]\end{aligned}$$

- D'autre part puisque pour tout réel x on a

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

pour tout réel x de $[0\ ;\ \pi]$, on a : $\cos x - 1 \leqslant 0$.

Pour conclure :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
Signe de $\cos x + 0.5$		$+$	0	$-$	
Signe de $\cos x - 1$	0	$-$		$-$	
Signe de $f'(x)$	0	$-$	0	$+$	

5. **Dresser le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ \pi]$.**
On calcule alors :

- $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$.
- Et :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{-3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
Signe de $f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

6. **Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur $[-\pi\ ;\ 3\pi]$.**

- On a les variations de f sur $[0\ ;\ \pi]$.
- On en déduit les variations de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ en utilisant le fait que la courbe est symétrique par rapport à l'origine puisque le fonction est impaire.
- Puis puisque f est $2\pi-$périodique, on en conclut les variations de f sur $[-\pi\ ;\ 3\pi]$.