



Math93.com

TD 2 - Terminale Spécialité Maths

Combinatoire, Dénombrement et Récurrence

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Ce TD propose des exercices complémentaires, de niveau avancé et des compléments de cours.

Exercice 1. Différence symétrique

La différence symétrique de A et de B , notée $A\Delta B$ (lire « A delta B ») est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A , soit à B , mais pas aux deux à la fois.

Pour A, B deux ensembles de E on note $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Pour E un ensemble fini, montrer :

$$\text{Card } A\Delta B = \text{Card } A + \text{Card } B - 2\text{Card } A \cap B.$$



Aide

🌀 Faire un dessin.

🌀 Pour A et B deux ensembles finis quelconques, commencer par redémontrer la formule : $\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B$.

Exercice 2. Formule du binôme

En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^n k C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k.$$



Aide

🌀 Évaluer $(1+x)^n$ en $x = 1$, d'une part directement et ensuite avec la formule du binôme de Newton. Pour la troisième égalité commencer par dériver $x \mapsto (1+x)^n$.

Exercice 3. Divisibilité

En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

- $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
- $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.



Aide

🌀 Commencer par $2^n = (3-1)^n$.

Exercice 4. Le problème du scrutin

Le plan est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On part du point de coordonnées $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q étant des entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou d'une unité vers le haut. Combien y-a-t-il de chemins possibles ?



Aide

↻ Coder un chemin par un mot : D pour droite, H pour haut.



Remarque historique

Cet exercice est le point de départ d'un célèbre problème de probabilité : le problème du scrutin. En 1878, William Allen Whitworth pose en exercice dans son livre "*Choice and chance*" la question : "*En combien d'ordres possibles peuvent être arrangées m unités positives et n unités négatives de sorte que la somme d'un nombre quelconque de termes ne soit jamais (strictement) négative ?*" Ce qui constitue de fait le problème du scrutin au sens large que l'on verra ci-dessous. Le problème a ensuite été posé et résolu par Joseph Bertrand en 1887 en utilisant une preuve par récurrence, une ingénieuse résolution directe étant peu après proposée par Désiré André. En 1907, G. Dumas publie une démonstration identique dans le fond à celle d'André.

Exercice 5. Un jeu de cartes

On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?



Aide

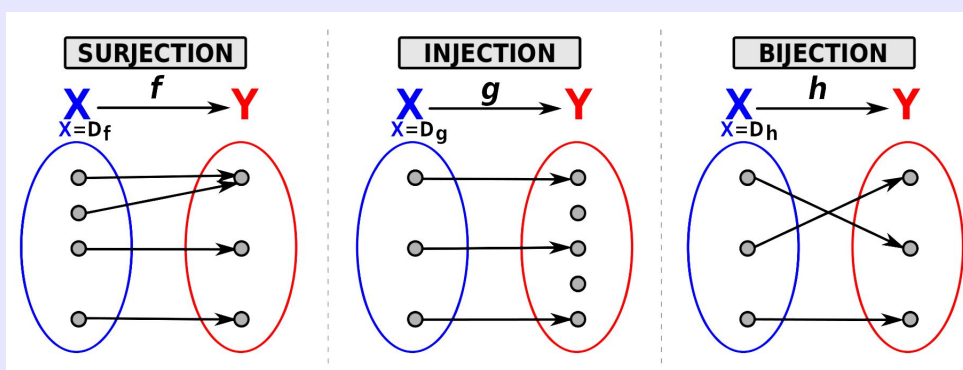
↻ dans un jeu de 52 cartes il y a 4 "couleurs" (pique, cœur, carreau, trèfle) et 13 "valeurs" (1 = As, 2, 3, ..., 10, Valet, Dame, Roi). Une "main" c'est juste choisir 5 cartes parmi les 52, l'ordre du choix n'important pas.

Exercice 6. Bijection



Bijection

1. Une application f est dite **injective** si tout élément de son ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f , ce qui revient à dire que deux éléments distincts de son ensemble de départ ne peuvent pas avoir la même image par f .
2. Une **surjection** est une application pour laquelle tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent, c'est-à-dire est image d'au moins un élément de l'ensemble de départ.
3. Une application est **bijection** si elle est à la fois **injective et surjective**.
C'est à dire si tout élément de son ensemble d'arrivée a un et un seul antécédent, c'est-à-dire est image d'exactly un élément (de son domaine de définition).



Combien y a-t-il de bijections f de $\{1, \dots, 12\}$ dans lui-même possédant :

1. la propriété : n est pair $\Rightarrow f(n)$ est pair ?
2. la propriété : n est divisible par 3 $\Rightarrow f(n)$ est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant *bijection* par *application*.

Exercice 7. Nombre de parties

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?



Aide

Combien y-a-t-il de choix pour l'élément de A ? Combien y-a-t-il de choix pour le sous-ensemble de $E \setminus A$?

↩ Fin du TD ↪

Première partie

CORRECTIONS

Correction de l'exercice 1 page 1

Tout d'abord si deux ensembles finis A et B sont disjoints alors $\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B$.

Si maintenant A et B sont deux ensembles finis quelconques : nous décomposons $A \cup B$ en trois ensembles :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B).$$

Ces trois ensembles sont disjoints deux à deux donc :

$$\text{Card } A \cup B = \text{Card } A \setminus (A \cap B) + \text{Card } B \setminus (A \cap B) + \text{Card } A \cap B$$

Mais pour $R \subset S$ nous avons

$$\text{Card } S \setminus R = \text{Card } S - \text{Card } R$$

Donc

$$\text{Card } A \cup B = \text{Card } A - \text{Card } A \cap B + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B + \text{Card } A \cap B$$

Donc

$$\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B$$

Appliquons ceci à $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$:

$$\text{Card } A \Delta B = \text{Card } A \cup B - \text{Card } A \cap B = \text{Card } A + \text{Card } B - 2\text{Card } A \cap B.$$

Une correction en vidéo : Vidéo

Correction de l'exercice 2 page 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = (1+x)^n$. Par la formule du binôme de Newton nous savons que

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

1. En calculant $f(1)$ nous avons $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$.
2. En calculant $f(-1)$ nous avons $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k$.
3. Maintenant puisque f est dérivable sur \mathbb{R} , calculons sa dérivée.

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k x^{k-1}$$

Évaluons $f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^n k C_n^k$.

4. Il s'agit ici de calculer la primitive F de f qui correspond à la somme :

$$F(x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1}$$

En

$$F(1) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k$$

Une correction en vidéo : Vidéo

Correction de l'exercice 3 page 1

L'astuce consiste à écrire $2 = 3 - 1$ (!)

$$2^n = (3 - 1)^n = 3 \times p + (-1)^n$$

Où $3 \times p$ ($p \in \mathbb{Z}$) représente les n premiers termes de $\sum_{k=0}^n C_n^k 3^k (-1)^{n-k}$ et $(-1)^n$ est le dernier terme.
Donc $2^n - (-1)^n = 3p$.

- Si n est impair l'égalité s'écrit $2^n + 1 = 3p$ et donc $2^n + 1$ est divisible par 3.
- Si n est pair $2^n - 1 = 3p$ donc $2^n + 1 = 3p + 2$ qui n'est pas divisible par 3.

Pour l'autre assertion regarder $3 = 7 - 4$.

Correction de l'exercice 4 page 2

On pose $H =$ "vers le haut" et $D =$ "vers la droite". Un exemple de chemin de $(0,0)$ à (p,q) est le mot $DD...DHH...H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent.

Le nombre de choix de l'emplacement du H est C_{p+q}^q . Une fois que les lettres H sont placées il n'y a plus de choix pour les lettres D . Il y a donc C_{p+q}^q chemins possibles.

Remarque : si on place d'abord les lettres D alors on a C_{p+q}^p choix possibles. Mais on trouve bien sûr le même nombre de chemins car $C_{p+q}^p = C_{p+q}^{(p+q)-p} = C_{p+q}^q$.

Correction de l'exercice 5 page 2

1. Il s'agit donc de choisir 5 cartes parmi 52 : il y a donc C_{52}^5 mains différentes. Ceci peut être calculé :

$$C_{52}^5 = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2\,598\,960$$

2. Il y a 4 choix pour l'as (l'as de pique ou l'as de cœur ou ...), puis il faut choisir les 4 cartes restantes parmi 48 cartes (on ne peut pas rechoisir un as). Bilan $4 \times C_{48}^4$ mains contenant exactement un as.
3. Il est beaucoup plus facile de compter d'abord les mains qui ne contiennent aucun valet : il faut choisir 5 cartes parmi 48 (on exclut les valets); il y a donc C_{48}^5 mains ne contenant aucun valet. Les autres mains sont les mains qui contiennent au moins un valet : il y en a donc $C_{52}^5 - C_{48}^5$.
4. Nous allons d'abord compter le nombre de mains que ne contiennent pas de roi ou pas de dame. Le nombre de mains qui ne contiennent pas de roi est C_{48}^5 (comme la question 3.). Le nombre de mains qui ne contiennent pas de dame est aussi C_{48}^5 . Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame n'est pas $C_{48}^5 + C_{48}^5$, car on aurait compté deux fois les mains ne contenant ni roi, ni dame (il y a C_{44}^5 telles mains). Le nombre de mains ne contenant pas de roi ou pas de dame est donc : $2C_{48}^5 - C_{44}^5$ (on retire une fois les mains comptées deux fois!). Ce que nous cherchons ce sont toutes les autres mains : celles qui contiennent au moins un roi et au moins une dame. Leur nombre est donc : $C_{52}^5 - 2C_{48}^5 + C_{44}^5$.

Correction de l'exercice 6 page 3

1. $(6!)^2$
2. $4! \times 8!$
3. $2!2!4!4!$
4. $6^6 \times 12^6, 4^4 \times 12^8, 2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$.

Correction de l'exercice 7 page 3

Fixons un élément de A ; dans $E \setminus A$ (de cardinal $n - p$), nous pouvons choisir C_{n-p}^k ensembles à k éléments ($k = 0, 1, \dots, n$). Le nombre d'ensembles dans le complémentaire de A est donc

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^k = 2^{n-p}.$$

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$

← **Fin du TD** →