



Math93.com

TD 1 - Terminale Spécialité Maths

Combinatoire, Dénombrement et Récurrence

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Les autres présentent des éléments de réponses et un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Première partie

Le raisonnement par récurrence

Quelques exercices sont ici proposés concernant la démonstration par récurrence avec des suites.
Nous reviendrons plus précisément dessus dans le chapitre lié à l'étude des suites.

Exercice 1. Calcul de sommes : Les indispensables

Ces résultats sont à connaître.

1. Démontrer (par la méthode de votre choix) que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 2. Une inégalité

Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$: $2^n \geq n$.



Aide

↪ Si $p \geq 1$, alors $2p \geq p + 1$

Exercice 3. ROC : Une inégalité très classique (Exigible)



ROC 1 : Exigible

Soit α un réel strictement positif.

Soit $P(n)$ la propriété :

$$\ll (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \gg \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Démontrer par récurrence que cette propriété est vraie.

Exercice 4. Récurrence ... ou pas

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3$$

2. Prouver ce résultat sans effectuer un raisonnement par récurrence.



Aide

1°) $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

2°) La somme compte n termes, majorer par n fois le max.

Exercice 5. Calculer le terme général d'une suite récurrente

Soit (v_n) la suite définie pour n entier naturel par :

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 2n + 2 \end{cases}$$

- Démontrer par récurrence que pour n entier naturel : $v_n = n(n+1) + 3$.
- Retrouver ce résultat sans récurrence en utilisant une astuce ...

Exercice 6. Calculer le terme général d'une suite récurrente : Conjecture et récurrence (c)

Soit (u_n) la suite définie pour n entier naturel par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

- Calculer les premiers termes de la suite. Est-elle arithmétique ? géométrique ?
- Émettre une conjecture sur l'expression u_n en fonction de n .
- Démontrer cette formule par récurrence.

Deuxième partie

Principes additif et multiplicatif

Exercice 7. Les capitaines (c)

Prérequis : Exercice corrigé 2 page 15 du manuel Indice (Bordas)

- Soit $E = \{a ; b ; c ; d ; e\}$ et $F = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ deux ensembles.
 - Déterminer le nombre d'éléments de $E \cup F$ et donner deux exemples d'éléments de cet ensemble.
 - Déterminer le nombre d'éléments de $E \times F$ et donner deux exemples d'éléments de cet ensemble.

2. Vrai ou Faux ?

Au cours d'un match de football opposant deux équipes de 11 joueurs, chaque équipe élit un capitaine.

Un binôme de capitaines est formé de deux capitaines, chacun issu d'une équipe différente.

Kylian affirme qu'il y a 22 binômes de capitaines possibles. Qu'en pensez-vous ?

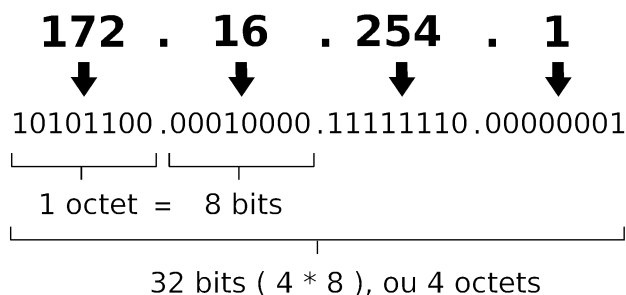
Exercice 8. Adresses IP (c)

Une **adresse IP** (avec IP pour *Internet Protocol*) est un numéro d'identification qui est attribué de façon permanente ou provisoire à chaque périphérique relié à un réseau informatique qui utilise l'*Internet Protocol*.

Il existe des adresses IP de version 4 (IPv4) constituées de 32 bits (4 octets), et de version 6 (IPv6) sur 128 bits (16 octets).

La version 4 est actuellement la plus utilisée : elle est généralement représentée en notation décimale avec quatre nombres compris entre 0 et 255, séparés par des points, ce qui donne par exemple :

Une adresse IPv4 (notation décimale à point)



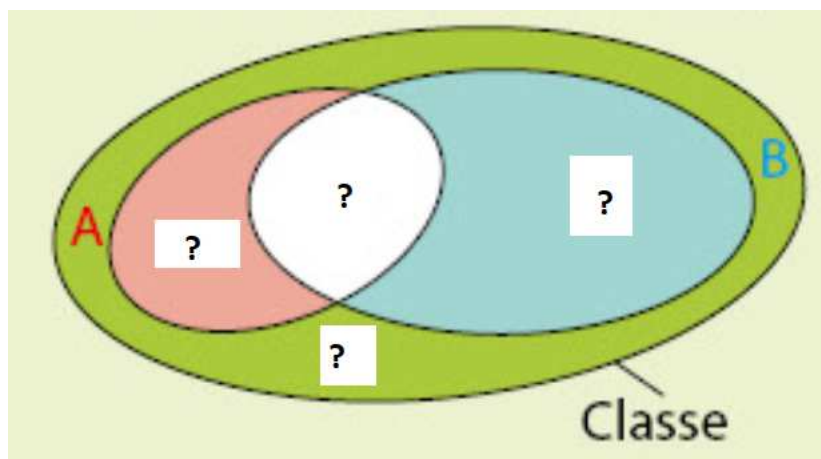
1. Avec une adresse IPv4, peut-on identifier cinq milliards d'ordinateurs de manière unique ?
2. L'IPv6 est constituée de 128 bits (16 octets) et est représentée en écriture hexadécimale, où les 8 groupes de 2 octets (16 bits par groupe donc de 0000 à ffff) sont séparés par un signe deux-points « : ». On a par exemple :

2001 : db8 : 1 : 85a3 : ab : 2ab : ac1f : 8001

Combien d'adresses IPv6 existe-t-il ?

Exercice 9. Avec un diagramme de Venn (c)

Dans une classe de 25 élèves, 15 s'inscrivent à l'atelier théâtre, 8 à l'atelier musique au 4 à ces deux ateliers.



1. Déterminer le nombre d'élèves s'inscrivant dans au moins un des deux ateliers.
2. Combien d'élèves ne s'inscrivent ni à l'atelier théâtre, ni à l'atelier musique.

Exercice 10. Avec 3 ensembles (c)

1. Démontrer que si A , B et C sont trois parties d'un ensemble fini E on a :

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card } A + \text{Card } B + \text{Card } C - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$$

2. On note M la spécialité Mathématiques, SP : Sciences physiques et SVT la spécialité associée.

Les 36 élèves d'une classe de seconde choisissent leurs spécialités de première : 13 ont choisi M , 10 SP et 7 SVT .

Par ailleurs, 6 ont choisi M et SP , 2 M et SVT et 3 SP et SVT .

Enfin 2 ont pris ces 3 spécialités.

Combien d'élèves n'ont pris aucune de ces 3 spécialités ?

Exercice 11. Raisonons un peu

Soit A et B deux ensembles disjoints et finis. On sait que :

$$\text{Card}(A \cup B) = 23 \text{ et } \text{Card}(A \times B) = 132$$

Déterminer $\text{Card } A$ et $\text{Card } B$ sachant que $\text{Card } A < \text{Card } B$.

Troisième partie

Dénombrement des k -uplets et parties de E

Exercice 12. Numéros de téléphone (c)

1. Les numéros de téléphone commençant par 06 sont constitués du couple $(0, 6)$ que l'on complète par un 8-uplet de l'ensemble $E = \{0, 1, \dots, 9\}$.

1. a. Déterminer le nombre de numéros de téléphone possible commençant par 06.

1. b. Déterminer le nombre de numéros de téléphone possible commençant par 06 ou 07.

2. En France, Orange possède tous les numéros commençant par 06 7 et 06 8.

Combien cela représente-t-il de numéros ?

Source : wikipedia.

Exercice 13. Nombre d'identifiants

Un professeur construit la liste des identifiants pour le réseau informatique d'une école de 700 élèves.

Chaque identifiant est composé de deux lettres : les initiales de l'élève en majuscule.

Est-il possible que chaque élève ait un identifiant différent ?

Exercice 14. Nombre de parties 1

Soit $E = \{1 ; a ; 5\}$.

1. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties de E .

2. Énumérer toutes ces parties.

Exercice 15. Nombre de parties 2 (c)

1. Situation 1.

Soit $E = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_8\}$ un ensemble de cardinal 8.

Combien cet ensemble a-t-il de parties ?

2. Situation 2.

Jacques lance 8 fois de suite une pièce de monnaie et observe si il obtient Pile (P) ou Face (F) (en anglais « heads or tails »).

Combien de résultats différents peut-il obtenir ?

3. Expliquer pourquoi les réponses à ces deux questions sont identiques.

Quatrième partie

***p*-arrangements de E de E et permutations**

Exercice 16. Les factorielles, c'est ma passion !

Soit n un entier naturel. Simplifier les écritures suivantes :

1. $(n + 1) \times n!$

2. $\frac{(n - 5)!}{(n - 7)!}$, pour $n \geq 7$

3. $\frac{(n + 2)!}{(n + 1)(n + 2)}$

4. $\frac{1}{(n + 1)!} - \frac{1}{n!}$

5. $\frac{n! \times (n + 2)!}{(n!)^2}$

6. $\frac{(n + 1)!}{n!} - \frac{n!}{(n - 1)!}$, pour $n \geq 1$

7. $\frac{(2(n + 1))!}{(2n + 1)!}$

8. $\frac{1}{(n - 2)!} - \frac{1}{n!}$, pour $n \geq 2$

Exercice 17. Les factorielles, en équation (c)

Résoudre l'équation suivante dans \mathbb{N} :

$$(n + 2)! = 6 \times n!$$

Exercice 18. Tableau, factorielle et récurrence : le trio magique !

On souhaite déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles : $2^n \leq n! \leq n^n$.

	A	B	C	D
1	n	2^n	n!	n^n
2	1	2	1	1
3	2	4	2	4
4	3	8	6	27
5	4	16	24	256
6	5	32	120	3125
7	6	64	720	46656
8	7	128	5040	823543
9	8	256	40320	16777216
10	9	512	362880	387420489
11	10	1024	3628800	1E+10
12	11	2048	39916800	2.8531E+11
13	12	4096	479001600	8.9161E+12

1. Quelles formules doivent être entrées dans les cellules **B3** et **D3** puis glissées vers le bas dans ce tableau ?
2. Quelle formule doit être entrée dans la cellule **C3** puis glissées vers le bas dans ce tableau pour calculer les factorielles sans utiliser la fonction **FACT** du tableur ?
3. Conjecture : à partir de quel entier n semble-t-on avoir : $2^n \leq n! \leq n^n$?
4. Démontrer cette conjecture.

Exercice 19. Le TOP 14 (c)

Le championnat de France de rugby, le TOP 14, est composé de 14 équipes.

Les six équipes avec le plus de points lors de la phase dite « régulière » disputent la deuxième phase du championnat.

1. Combien de classements des 14 équipes de la première phase sont possibles ?
2. Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la première phase suivi de Clermont-Ferrand.
Combien de classements de ce championnat sont alors possibles avec ces deux équipes positionnées respectivement en première et deuxième place ?
3. Combien de classements composés des six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?
4. Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la première phase.
Combien de classements composés des six premières équipes de cette phase régulière étaient alors possibles avec le Stade Toulousain en tête ?

Exercice 20. Avec un code (c)

1. Soit E un ensemble de cardinal 9.
 1. a. Combien y a-t-il de 4-uplets d'éléments de E ?
 1. b. Combien y a-t-il de 4-arrangements (ou 4-uplets d'éléments distincts) de E ?
2. M. Hack doit créer un code de sécurité à 6 chiffres pour son smartphone.
 2. a. Combien de codes peut-il créer ?
 2. b. Il souhaite modifier son code. Il décide de ne jamais utiliser le chiffre 0. Combien de codes peut-il créer ?
 2. c. Si maintenant il décide seulement de ne jamais utiliser le même chiffre, mais s'autorise à choisir le 0. Combien de codes peut-il créer ?
 2. d. M. Hack a oublié son code, il sait seulement qu'il se termine par 5 et qu'il l'a choisi comme dans la question précédente. Combien de codes différents sont alors possibles.

Exercice 21. Un peu de musique

Amadéus joue sur son piano avec 7 notes : Do, Ré, Mi, fa, Sol, La, Si.

Combien de mélodies différentes peut-il obtenir avec 5 notes distinctes de cet ensemble ? Avec 7 notes distinctes de cet ensemble.

Cinquième partie

Combinaisons

Exercice 22. Développement de $(a + b)^n$ (c)

On cherche à démontrer la propriété suivante !

Propriété 1 (Développement $(a + b)^n$)

Soit a et b deux nombres réels et n un entier.

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Soit a et b deux nombres réels et n un entier.

1. On développe $(a + b)^n = (a + b) \times (a + b) \times \dots \times (a + b)$. Quelle est la forme des termes obtenus ?
2. Pour k fixé, combien y-a-t-il de termes égaux à $a^k b^{n-k}$? Conclure.
3. Donner le développement de $(a + b)^6$ et de $(a - b)^6$.

Exercice 23. ROC : Triangle de Pascal (c)

Démontrer par le calcul que :

Propriété 2 (Relation de Pascal)

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n - 1$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Remarque : attention à la condition initiale, il faut que $p \leq n - 1$.

Exercice 24. Les cartes et le raisonnement d'évariste

Problème : dans un jeu de 32 cartes, combien y-a-t-il de mains de 5 cartes qui contiennent au moins un roi ?

Evariste, un élève de la classe propose ce raisonnement :



Réponse d'évariste

Il faut au moins un roi, il y a 4 possibilités.

Puis, on tire 4 cartes parmi les 31 restantes, ce qui fait $\binom{31}{4}$ choix possibles.

Le nombre de tirages qui contiennent au moins un roi est donc :

$$4 \times \binom{31}{4} = 125\,860$$

1. A priori, que pensez-vous de son raisonnement ?

2. On considère la main : roi de Pique, roi de Trèfle, as de Cœur, valet de Carreau, 7 de Trèfle.
Expliquer pourquoi Evariste a compté deux fois une telle main dans son dénombrement.
3. On peut visualiser les mains de 5 cartes ainsi (on partitionne l'ensemble) :

Mains de 5 cartes

0 roi	1 roi	2 rois	3 rois	4 rois
-------	-------	--------	--------	--------

Colorier l'ensemble des mains avec au moins un roi.

4. Déterminer alors le nombre de mains avec au moins un roi.

Sixième partie

Bilan

Exercice 25. Groupes sanguins

Le groupe sanguin d'un être humain est déterminé par un gène situé sur le chromosome 9 qui contient un couple d'éléments de l'ensemble des allèles $E = \{A ; B ; O\}$

1. On appelle *hétérozygote* un gène qui est représenté par deux allèles différents (l'ordre ne compte pas pour les allèles).

Déterminer le nombre d'hétérozygotes pour le groupe sanguin et listez-les.

2. On appelle *homozygote* un gène qui est représenté par deux allèles identiques .

Déterminer le nombre d'homozygotes pour le groupe sanguin et listez-les.

3. On appelle *génotype* l'ensemble des compositions alléliques d'un individu.

Déterminer le nombre de génotypes et listez-les.

4. Le groupe sanguin est alors déterminé par ces génotypes sachant que :

- l'allèle A est dominante sur l'allèle O - donc par exemple $\{A ; O\}$ donne le groupe A ;
- l'allèle B est dominante sur l'allèle O - donc par exemple $\{B ; O\}$ donne le groupe B ;

Montrer que l'on obtient avec le système dit ABO 4 groupes sanguins : A, B, AB et O.

5. A ce système dit ABO on ajoute le système Rhésus (ou RHD) qui détermine quant à lui, selon la présence ou l'absence de l'antigène D sur les globules rouges, si un individu est Rhésus positif (+) ou négatif (-).

Pour chacun des 4 groupes sanguins on associe soit le Rhésus positif (+) ou négatif (-). Dénombrer et lister tous les groupes sanguins.



Remarques

- Un individu de groupe A peut recevoir du sang de groupes : A ou AB ou O.
- Un individu de groupe B peut recevoir du sang de groupes : B ou AB ou O.
- Un individu de groupe AB peut recevoir du sang de tous les groupes. Il est receveur universel.
- Un individu de groupe O ne peut recevoir du sang que du groupe O mais il est donneur universel.
- Le système Rhesus, explique certains problèmes indépendants du système ABO suspectés par Levine et Stetson en 1939. Il fut découvert et nommé en 1940 par Landsteiner et Wiener.

Rhésus est le nom d'une espèce de macaque, *Macaca rhesus*, qui a permis de mettre en évidence ce système de groupe sanguin.

- Dans la population française on a :

	O	A	B	AB
Rh+	36%	38%	8%	3%
Rh-	6%	7%	1%	1%
Total	42%	45%	9%	4%

Exercice 26. Poker

Lors d'une partie de Poker, les participants jouent avec un jeu de 52 cartes réparties en 4 couleurs (Pique, Trèfle, Carreau, Cœur).

Pour chaque couleur, il y a 13 valeurs différentes (dix cartes de 1 à 10, un Valet, une Dame et un Roi).

Un joueur tire simultanément 5 cartes.

1. Quel est le nombre de mains de 5 cartes ?
2. Quel est le nombre de mains de 5 cartes avec un full, c'est à dire comprenant 3 cartes de même valeur et 2 cartes d'une autre valeur ? Par exemple :

Mains de 5 cartes avec un full

Valet Cœur	Valet Trèfle	Valet Pique	10 Cœur	10 Carreau
------------	--------------	-------------	---------	------------

3. En déduire la probabilité d'obtenir un full. Arrondir à 10^{-4} .
4. (*) De même calculer la probabilité d'obtenir une paire (et seulement une, pas de full, carré, ...).

Mains de 5 cartes avec une paire

Valet Cœur	Valet Trèfle	?	?	?
------------	--------------	---	---	---

5. (*) De même calculer la probabilité d'obtenir deux paires (pas de full ni de carré).

Mains de 5 cartes avec deux paires

Valet Cœur	Valet Trèfle	10 Carreau	10 Pique	?
------------	--------------	------------	----------	---

Exercice 27. Exercices du Indice - Bordas

1. Exercice 99 page 33 : avec un urne.
2. Exercice 111 page 35 : le Loto.
3. Exercice 131 page 39 : paradoxe des anniversaires.

Exercice 28. (*) Formule de Vandermonde

Soit m , n et p trois entiers naturels. Avec $0 \leq p \leq n$ et $0 \leq p \leq m$ soit $0 \leq p \leq \min(m ; n)$.

1. Démontrer l'identité de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

On peut considérer un ensemble de cardinal $(m+n)$, réunion d'ensembles de cardinaux m et n .

2. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$



Remarque historique

L'**identité de Vandermonde** est ainsi nommée en l'honneur de mathématicien français Alexandre-Théophile Vandermonde (1772). On la nomme aussi **formule de convolution**.

Septième partie

CORRECTIONS

Correction de la partie I

Correction de l'exercice 6 page 2

On obtient pour n entier, $u_n = 2^n - 1$.

Correction de la partie II

Correction de l'exercice 7 page 2 : les capitaines

1. Soit $E = \{a ; b ; c ; d ; e\}$ et $F = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ deux ensembles.

1. a. **Déterminer le nombre d'éléments de $E \cup F$ et donner deux exemples d'éléments de cet ensemble.**
Les deux ensembles E et F sont disjoints donc

$$\text{Card } E \cup F = \text{Card } E + \text{Card } F = 5 + 5 = 10$$

Par ailleurs $E \cup F$ est composé des éléments de E ou de F soit :

$$E \cup F = \{a ; b ; c ; d ; e ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$$

1. b. **Déterminer le nombre d'éléments de $E \times F$ et donner deux exemples d'éléments de cet ensemble.**
D'après le principe multiplicatif :

$$\text{Card } (E \times F) = \text{Card } E \times \text{Card } F = 5 \times 5 = 25$$

Par ailleurs $E \times F$ est composé couples $(x ; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$ soit par exemple $(a ; 1)$ ou $(b ; 4)$.

2. **Vrai ou Faux ?**

Au cours d'un match de football opposant deux équipes de 11 joueurs, chaque équipe élit un capitaine. Un binôme de capitaines est formé de deux capitaines, chacun issu d'une équipe différente. Kylian affirme qu'il y a 22 binômes de capitaines possibles. Qu'en pensez-vous ?

Si on pose E ensemble des joueurs de l'équipe 1 et F ceux de l'équipe 2, le choix d'un binôme de capitaine est un couple du produit cartésien $E \times F$.

D'après le principe multiplicatif, il y a $11 \times 11 = 121$ couples possibles de capitaines.

Correction de l'exercice 8 page 3 : les adresses IP

1. L'IPv4 est constituée de 32 bits, il y a donc 2^{32} d'adresses possibles soit environ 4,295 milliards .

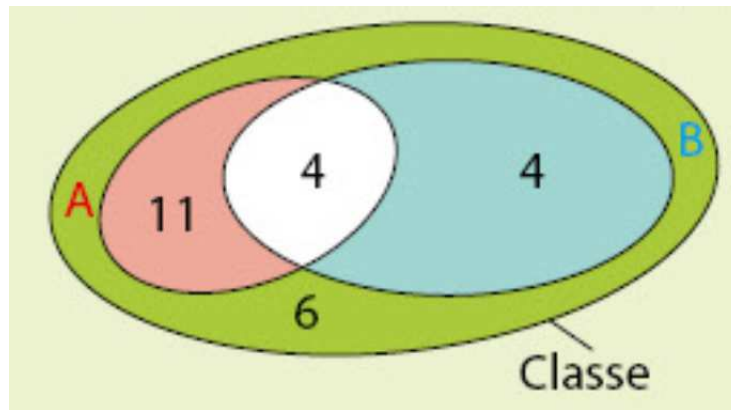
On ne peut pas identifier cinq milliards d'ordinateurs de manière unique.

2. L'IPv6 est constituée de 128 bits, il y a donc 2^{128} adresses possibles soit environ $3,4 \times 10^{38}$ (340 sextillion).

Remarque : un sextillon est égal à $10^{6 \times 6} = 10^{36}$.

Correction de l'exercice 9 page 3 : diagramme de Venn

Dans une classe de 25 élèves, 15 s'inscrivent à l'atelier théâtre, 8 à l'atelier musique au 4 à ces deux ateliers.



1. Déterminer le nombre d'élèves s'inscrivant dans au moins un des deux ateliers.

A est l'ensemble des élèves de l'atelier théâtre et B ceux de l'atelier musique. On cherche donc $\text{Card } A \cup B$.

$$\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B)$$

Or 4 s'inscrivent aux deux ateliers donc $\text{Card } (A \cap B) = 4$ soit

$$\text{Card } (A \cup B) = 15 + 8 - 4 = 19$$

Le nombre d'élèves s'inscrivant dans au moins un des deux ateliers est 19.

2. Combien d'élèves ne s'inscrivent ni à l'atelier théâtre, ni à l'atelier musique.

Puisque $\text{Card } (A \cup B) = 15 + 8 - 4 = 19$, alors $25 - 19 = 6$ élèves ne s'inscrivent ni à l'atelier théâtre, ni à l'atelier musique.

Correction de l'exercice 10 page 4 : trois ensembles

1. On a en utilisant la formule du crible deux fois avec $(A \cup B \cup C) = ((A \cup B) \cup C)$:

$$\begin{aligned} \text{Card } (A \cup B \cup C) &= \text{Card } ((A \cup B) \cup C) \\ &= \text{Card } (A \cup B) + \text{Card } C - \text{Card } ((A \cup B) \cap C) \\ &= \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B) + \text{Card } C - \text{Card } ((A \cup B) \cap C) \end{aligned}$$

Or $((A \cup B) \cap C) = ((A \cap C) \cup (B \cap C))$ donc

$$\begin{aligned} &= \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B) + \text{Card } C - \text{Card } ((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B) + \text{Card } C \\ &\quad - (\text{Card } (A \cap C) + \text{Card } (B \cap C) - \text{Card } (A \cap B \cap C)) \\ &= \text{Card } A + \text{Card } B + \text{Card } C - \text{Card } (A \cap B) - \text{Card } (A \cap C) - \text{Card } (B \cap C) \\ &\quad + \text{Card } (A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

2. On note M la spécialité Mathématiques, SP : Sciences physiques et SVT la spécialité associée. Les 36 élèves d'une classe de seconde choisissent leurs spécialités de première : 13 ont choisi M, 10 SP et 7 SVT. Par ailleurs, 6 ont choisi M et SP, 2 M et SVT et 3 SP et SVT. Enfin 2 ont pris ces 3 spécialités. Combien d'élèves n'ont pris aucune de ces 3 spécialités ?

On cherche : $36 - \text{Card } (M \cup SP \cup SVT)$ soit en appliquant la formule précédente, le nombre d'élèves cherché est :

$$36 - \text{Card } (M \cup SP \cup SVT) = 36 - (13 + 10 + 7 - 6 - 2 - 3 + 2) = 36 - 21 = 15$$

Correction de la partie III

Correction de l'exercice 12 page 4

- 10^8 .
- 2×10^8 .

Exercice 29. Correction de l'exercice 15 page 5 : Nombre de parties 2

- Situation 1 : Soit $E = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_8\}$ un ensemble de cardinal 8. Combien cet ensemble a-t-il de parties ?**

Le nombre de parties de E est $2^8 = 256$.

- Situation 2 : Jacques lance 8 fois de suite une pièce de monnaie et observe si il obtient Pile (P) ou Face (F) (en anglais « heads or tails ») . Combien de résultats différents peut-il obtenir ?**

Un résultat de cette expérience aléatoire est un 8-uplet de $\{P ; F\}$ de cardinal 2.

Il y a donc $2^8 = 256$ 8-uplet de $\{0 ; 1\}$ possibles.

- Expliquer pourquoi les réponses à ces deux questions sont identiques.**

On convient que la présence d'un Pile en i -ème position dans le résultat de l'expérience de Jacques, correspond à la présence de x_i dans la partie de E correspondante.

Par exemple, au résultat (P ; P ; F ; P ; F ; F ; F ; F) correspond la partie $\{x_1 ; x_2 ; x_4\}$ de E .

Il y a donc autant de parties de E que résultats possibles pour cette expérience.

Correction de la partie IV

Correction de l'exercice 17 page 5 : équation et factorielle

Résoudre l'équation suivante dans \mathbb{N} : $(n + 2)! = 6 \times n!$.

Puisque pour tout entier n , on a $n! \neq 0$:

$$\begin{aligned} (n + 2)! = 6 \times n! &\iff \frac{(n + 2)!}{n!} = 6 \\ &\iff (n + 2)(n + 1) = 6 \\ &\iff n^2 + 3n + 2 = 6 \\ &\iff n^2 + 3n - 4 = 6 \end{aligned}$$

L'expression $(n^2 + 3n - 4)$ est un expression du second degré de la forme $(an^2 + bn + c)$. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{array} \right. \implies \Delta = 25 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $n \mapsto (n^2 + 3n - 4)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$n_1 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2} = -4 \notin \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2} = 1 \in \mathbb{N}$$

L'unique solution de l'équation est donc $n = 1$.

On vérifie bien que : $(1 + 2)! = 6$ et $6 \times 1! = 6$.

Correction de l'exercice 19 page 6 : rugby

Le championnat de France de rugby, le TOP 14, est composé de 14 équipes. Les six équipes avec le plus de points lors de la phase dite « régulière » disputent la deuxième phase du championnat.

1. Combien de classement des 14 équipes de la première phase sont possibles ?

Un classement est une permutation de l'ensemble des 14 équipes. Il y a $14!$ permutations possibles soit 87 178 291 200 (plus de 87 milliards).

2. Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la première phase suivi de Clermont-Ferrand. Combien de classements de ce championnat sont alors possibles avec ces deux équipes positionnées respectivement en première et deuxième place ?

Les deux premières places sont fixées, il reste à classer les 12 équipes qui restent. Cela revient à réaliser une permutation d'un ensemble de cardinal 12.

Il y a donc $12!$ soit 479 001 600 (479 millions environ) classements possibles répondants à ce critère.

3. Combien de classement composés des six équipes qui atteignent la deuxième phase sont possibles ?

Cela correspond au nombre de 6-arrangements (ou 6-uplets d'éléments distincts) de l'ensemble des 14 équipes. Il y en a :

$$A_6^{14} = \frac{14!}{(14-6)!} = \frac{14!}{8!} = 2\,162\,160$$

4. Lors de la saison 2018-2019, c'est le Stade Toulousain qui a fini premier de la première phase. Combien de classements composés des six premières équipes de cette phase régulière étaient alors possibles avec le Stade Toulousain en tête ?

Le premier est fixé. Il reste à compléter avec 5 équipes parmi les 13 restantes. Il y en a :

$$A_5^{13} = \frac{13!}{(13-5)!} = \frac{13!}{8!} = 154\,440$$

Correction de l'exercice 20 page 6 : code

1. Soit E un ensemble de cardinal 9.

1. a. Combien y a-t-il de 4-uplets d'éléments de E ?

$$9^4 = 6\,561$$

1. b. Combien y a-t-il de 4-arrangements (ou 4-uplets d'éléments distincts) de E ?

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3\,024$$

2. M. Hack doit créer un code de sécurité à 6 chiffres pour son smartphone.

2. a. Combien de codes peut-il créer ?

$$10^6$$

2. b. Il souhaite modifier son code. Il décide de ne jamais utiliser le chiffre 0. Combien de codes peut-il créer ?

$$9^6 = 531\,441$$

2. c. Si maintenant il décide seulement de ne jamais utiliser le même chiffre, mais s'autorise à choisir le 0. Combien de codes peut-il créer ?

$$A_6^{10} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \frac{10!}{4!} = 151\,200$$

2. d. M. Hack a oublié son code, il sait seulement qu'il se termine par 5 et qu'il l'a choisi comme dans la question précédente. Combien de codes différents sont alors possibles.

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1 = \frac{10!}{5!} = 30\,240$$

Correction de la partie V

Correction de l'exercice 22 page 7 : $(a + b)^n$

Soit a et b deux nombres réels et n un entier.

1. **On développe $(a + b)^n = (a + b) \times (a + b) \times \dots \times (a + b)$. Quelle est la forme des termes obtenus ?**
Un terme de la somme du développement s'obtient en prenant dans chaque facteur du produit, soit a , soit b .
S'il y a k facteurs a , il y a nécessairement $(n - k)$ facteurs b .

$$\boxed{a} \boxed{b} \boxed{b} \boxed{a} \dots \boxed{a} \boxed{b}$$

Donc chaque terme du développement est de la forme $a^k b^{n-k}$, avec $0 \leq k \leq n$.

2. **Pour k fixé, combien y-a-t-il de termes égaux à $a^k b^{n-k}$?**
Pour k fixé, il y a autant de termes de la forme $a^k b^{n-k}$ qu'il y a de façons de choisir les k parenthèses (facteurs du produit) où l'on prend les facteurs a , c'est à dire $\binom{n}{k}$.

3. **Conclure.**

On vient donc de prouver que :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Correction de l'exercice 23 page 7 : triangle de Pascal

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n - 1$. On cherche à montrer que :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Pour $1 \leq p \leq n - 1$ on a :

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times p}{(p-1)!(n-p)! \times p} + \frac{(n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p-1)! \times (n-p)} \\ &= \frac{(n-1)! \times p + (n-1)! \times (n-p)}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times (p + (n-p))}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)! \times n}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 24 page 7 : les cartes d'évariste

1. A priori, que pensez-vous de son raisonnement ?
2. On considère la main : roi de Pique, roi de Trèfle, as de Cœur, valet de Carreau, 7 de Trèfle. Expliquer pourquoi Evariste a compté deux fois une telle main dans son dénombrement.
 - Il le compte une fois quand il choisi le roi de Pique puis les 4 autres cartes ;
 - une autre fois quand il choisi le roi de Trèfle puis les 4 autres cartes ;
3. Colorier l'ensemble des mains avec au moins un roi.

Mains de 5 cartes				
0 roi	1 roi	2 rois	3 rois	4 rois

4. Déterminer alors le nombre de mains avec au moins un roi.

- Le nombre total de mains de 5 cartes sur un jeu de 32 est : $\binom{32}{5} = 201\ 376$.
- Le nombre total de mains de 5 cartes sans roi sur un jeu de 32 est : $\binom{28}{5} = 98\ 280$.
- Donc Le nombre total de mains de 5 cartes avec au moins un roi sur un jeu de 32 est :

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\ 096$$

Correction de la partie VI

Correction de l'exercice 26 page 10 : Poker

Lors d'une partie de Poker, les participants jouent avec un jeu de 52 cartes réparties en 4 couleurs (Pique, Trèfle, Carreau, Cœur). Pour chaque couleur, il y a 13 valeurs différentes (dix cartes de 1 à 10, un Valet, une Dame et un Roi). Un joueur tire simultanément 5 cartes.

1. Quel est le nombre de mains de 5 cartes ?

Le nombre de mains de 5 cartes correspond au nombre de combinaisons de 5 cartes parmi 32 soit :

$$\binom{52}{5} = 2\ 598\ 960$$

2. Quel est le nombre de mains de 5 cartes avec un full, c'est à dire comprenant 3 cartes de même valeur et 2 cartes d'une autre valeur ?

Mains de 5 cartes avec un full				
Valet Cœur	Valet Trèfle	Valet Pique	10 Cœur	10 Carreau

- Choix de la première valeur : $\binom{13}{1} = 13$ choix.
- Choix des 3 couleurs parmi 4 de la première valeur : $\binom{4}{3} = 4$ choix.
- Choix de la deuxième valeur : $\binom{12}{1} = 12$ choix.

- Choix des 2 couleurs parmi 4 de la deuxième valeur : $\binom{4}{2} = 6$ choix.

Soit au total un nombre de main avec un full de :

$$13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744$$

3. En déduire la probabilité d'obtenir un full. Arrondir à 10^{-4} .

Puisqu'il y a équiprobabilité :

$p = \frac{3744}{2\,598\,960} \approx 0,0014 \text{ environ } \underline{0,14\%}$

4. De même calculer la probabilité d'obtenir une paire (et seulement une).

Mains de 5 cartes avec une paire

Valet Cœur	Valet Trèfle	?	?	?
------------	--------------	---	---	---

- On choisit la paire :
 - choix de la première valeur : $\binom{13}{1} = 13$ choix.
 - Choix des 2 couleurs parmi 4 de la première valeur : $\binom{4}{2} = 6$ choix.
- Pour les trois restantes cartes, on en choisit 3 parmi les 12 autres valeurs afin de ne pas avoir de paires ou de full. Le nombre de cas possibles pour avoir trois autres différentes valeurs est $\binom{12}{3} = 220$, chacune avec 4 couleurs possibles soit 4^3 .

Soit au total :

$$\binom{13}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1\,098\,240$$

La probabilité d'avoir une paire seulement est :

$p = \frac{1\,098\,240}{2\,598\,960} \approx 0.4226 \text{ environ } \underline{42,26\%}$

5. De même calculer la probabilité d'obtenir deux paires (pas de full ni de carré).

Mains de 5 cartes avec deux paires

Valet Cœur	Valet Trèfle	10 Carreau	10 Pique	?
------------	--------------	------------	----------	---

- Se compose de deux paires de valeurs différentes. La cinquième est une carte d'une autre valeur.
 - Pour les deux paires, le nombre de cas possibles pour avoir deux valeurs est $\binom{13}{2}$.
 - Chacune de ses deux valeurs comporte $\binom{4}{2}$ possibilités de couleurs.
- Donc $\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2}$ possibilités.

- Pour la carte qui reste, le nombre de cas possibles pour avoir une autre valeur différente est $\binom{11}{1}$, qui compte 4 couleurs possibles. Ce qui fait $\binom{11}{1} \times 4$.

Soit au total :

$$\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{11}{1} \times 4 = 123\,552$$

La probabilité d'avoir une paire seulement est :

$$p = \frac{123\,552}{2\,598\,960} \approx 0,0475 \text{ environ } \underline{4,75\%}$$

Correction de l'exercice 28 page 10 : Vandermonde

Soit m, n et p trois entiers naturels.

On prendra $0 \leq p \leq n$ et $0 \leq p \leq m$ ce que l'on peut résumer par $0 \leq p \leq \min(m; n)$.

1. Démontrer que :
$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}.$$

- Soit E et F deux ensembles disjoints de cardinal m et n .

Alors $\text{Card } E \cup F = m + n$ et il y a en tout $\binom{m+n}{p}$ parties de $E \cup F$ de cardinal p .

- Une partie de $E \cup F$ de cardinal p se compose de k éléments de E et $(p-k)$ éléments de F , où $0 \leq k \leq p$.

Pour k fixé, on obtient $\binom{m}{k} \times \binom{n}{p-k}$ telles parties de $E \cup F$ de cardinal p .

- Comme les parties de $E \cup F$ ainsi obtenues sont distinctes, le nombre total de parties de $E \cup F$ de cardinal p est $\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k}$ et de ce fait :

$$\sum_{k=0}^p \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

2. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Pour $m = n = p$ on obtient la formule demandée en utilisant la symétrie des coefficients binomiaux

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

$$\binom{m+n}{n} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

↩ **Fin du TD** ↪