



Math93.com

# TD 1 - Terminale Spécialité maths

## Fonctions : continuité et TVI

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

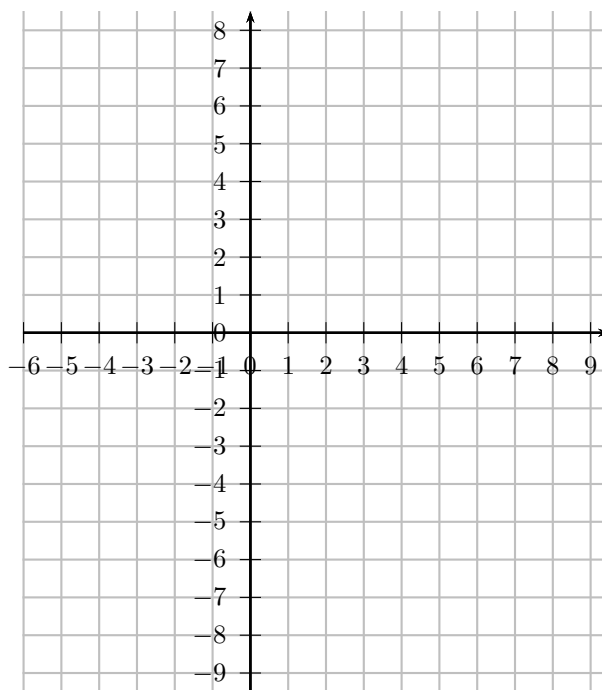
### Première partie

## Continuité

#### Exercice 1. Un peu d'algorithmique (c)

1. Écrire un algorithme qui permet de calculer l'image d'une valeur demandée, par la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h : x \mapsto h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



2. Tracer  $\mathcal{C}_h$  dans le repère ci-contre.
3. La fonction  $h$  est-elle continue? Justifier en utilisant la définition du cours (calculer les limites à droite et à gauche ...).

#### Exercice 2. Une autre fonction définie par morceaux (c)

Étudier la continuité de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

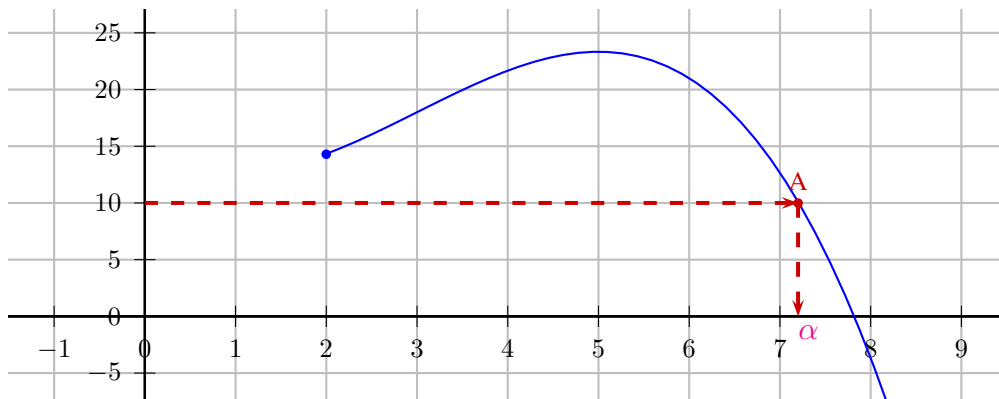
$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ -e^{x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Deuxième partie

Le TVI, c'est ma passion ... Suivez le guide

**Exemple 1** (Résolution de  $f(x) = 10$ )

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[2; +\infty[$  par :  $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 15$ .



**1. Donner rapidement la limite de  $f$  en  $+\infty$ .**

Pour tout réel  $x$  de  $[2; +\infty[$  on a :

$$f(x) = x^3 \left( -\frac{1}{3} + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{15}{x^3} \right)$$

Or d'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15}{x^3}$$

De ce fait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{3} + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{15}{x^3} \right) = -\frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \end{array} \right. \implies \text{par produit } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

**2. Étudier les variations de  $f$  sur  $[2; +\infty[$ .**

- La fonction  $f$  est définie sur  $[2; +\infty[$  donc continue et dérivable sur cet intervalle car c'est une fonction polynôme.

- Pour tout réel  $x$  de  $[2; +\infty[$  on a  $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 15$  donc :

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{3} + 3 \times 2x - 5 = \underline{\underline{-x^2 + 6x - 5}}$$

- Cas général sur  $\mathbb{R}$  : étude de  $x \mapsto -x^2 + 6x - 5$  sur  $\mathbb{R}$  (on ne la nomme pas).  
La fonction  $x \mapsto -x^2 + 6x - 5$  une fonction polynôme du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -5 \end{array} \right. \implies \Delta = 16 > 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-6 + \sqrt{16}}{-2} = 1 \notin [2; +\infty[ \\ x_2 = \frac{-6 - \sqrt{16}}{-2} = 5 \in [2; +\infty[ \end{array} \right.$$

Le discriminant étant positif strictement, le trinôme  $(-x^2 + 6x - 5)$  a deux racines réelles. Il est du signe de  $a = -1 < 0$  soit négatif à l'extérieur des racines et positif ailleurs.

**Exemple 1** (Suite de l'exercice type, résolution de  $f(x) = 10$ )

- Retour sur la dérivée sur  $[2; +\infty[$ . La dérivée  $f'$  est donc positive de 2 à 5 et négative ailleurs soit le tableau de variations suivant :

$x$	2	5	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
Variations de $f$	$f(2) \approx 14.3$	$f(5) \approx 23.3$	$-\infty$

**2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 10$ .**

$x$	2	5	$\alpha$	$+\infty$
Variations de $f$	$f(2) \approx 14.3$	$f(5) \approx 23.3$	10	$-\infty$

**Méthode 1** (Nombre de solutions d'une équation et TVI)

On va appliquer le corolaire du TVI sur chaque intervalle où la fonction est monotone. On va essayer d'en éliminer certains qui ont un maximum ou un minimum qui permettent d'affirmer la non-existence de solution.

- Sur  $[2; 5]$ .  
Sur l'intervalle  $[2; 5]$ , la fonction  $f$  admet  $f(2) \approx 14,3$  comme minimum. De ce fait, l'équation  $f(x) = 10$  n'admet pas de solution.
- Sur  $[5; +\infty[$  :
  - La fonction  $f$  est *continue et strictement décroissante* sur l'intervalle  $[5; +\infty[$ ;
  - On a  $k = 10$  compris entre  $f(5) \approx 23,3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ;
  - Donc, d'après le *corolaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation  $f(x) = 10$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[5; +\infty[$ .
- Bilan : sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = 10$  admet donc une unique solution  $\alpha$ .

**3. Déterminer un encadrement et une valeur approchée de  $\alpha$  au centième.**

**Méthode 2** (Encadrement et approximation de la solution d'une équation par balayage)

On cherche à encadrer  $\alpha$ . On va utiliser la fonction **TABLE** de la calculatrice en partant de la borne inférieure de l'intervalle (ici on part de 5 sur  $[5; 8]$  par exemple). On réglera le **PAS** ou **STEP** progressivement sur 1, puis sur 0,1 et enfin sur 0,01 à l'aide du **MENU TABLE SET** afin d'affiner l'encadrement mais on ne présente sur sa copie que l'encadrement final demandé.

- Avec un pas de  $\Delta = 0.01$  on obtient :  $\left\{ \begin{array}{l} f(7,20) \approx 10,104 > 10 \\ f(7,21) \approx 9,97 < 10 \end{array} \right.$ , donc  $7,20 < \alpha < 7,21$ .

Une valeur approchée de  $\alpha$  à 0.01 près est donc  $\alpha \approx 7,20$  (ou  $\alpha \approx 7,21$ ).

**Exercice 3. Suivons le guide**

On va reprendre les questions de l'exemple 1 avec une autre fonction. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f : \begin{cases} [0; +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 1 \end{cases}$$

1. Montrer rapidement que  $f$  est continue et dérivable sur  $[0; +\infty[$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
3. Déterminer sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  le nombre de solutions de l'équation :  $f(x) = 40$ .
4. Donner une valeur approchée de la (ou des) solution(s) au centième.
5. **Avec une suite.**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour  $n$  entier,  $8 \leq u_n \leq u_{n+1}$ .

En déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante.

6. **Une égalité.**

On note  $\alpha$  la solution de l'équation  $f(x) = 40$  de la question (4.).

Montrer que  $\alpha$  vérifie l'égalité :

$$\alpha^3 = 12\alpha^2 - 36\alpha + 117$$

**Réponses**

⚡ (2.)  $f$  croissante sur  $[0; 2]$ , décroissante sur  $[2; 6]$  et croissante sur  $[6; +\infty[$ . (4.)  $\alpha \approx 9,51$ .

**Exercice 4. Courbe de la dérivée!!**

**Point Bac : Danger, on donne la courbe de la dérivée, pas de la fonction.**

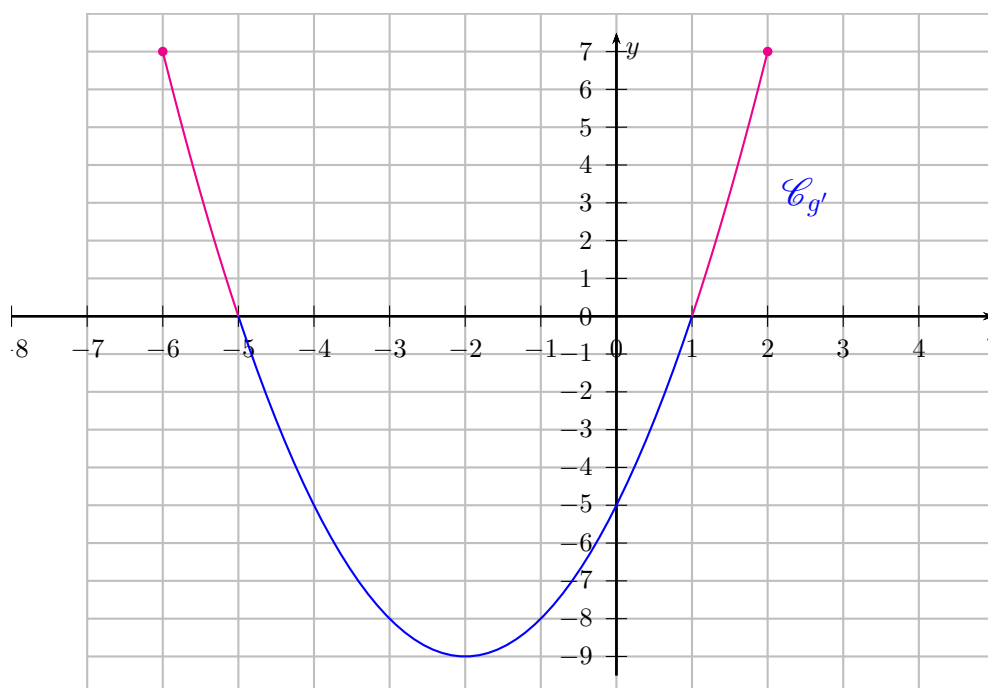
C'est une question classique.

**Méthode 3**

On donne la courbe de la dérivée et il faut en déduire le tableau de variation de la fonction. Une chose à retenir :

« CE QUI NOUS INTÉRESSE SUR LA DÉRIVÉE C'EST SON SIGNE »

On va donc établir un tableau de signe de la fonction tracée, c'est à dire regarder pour quelles valeurs de  $x$  sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, et en-dessous.



On a ci-dessus construit la courbe représentative de la fonction  $g'$ , la dérivée d'une fonction  $g$ , définie et dérivable sur  $[-6; 2]$ .

1. D'après le graphique, dresser le tableau de variation de  $g$  sur  $[-6; 2]$ .
2. La fonction  $g$  est en fait la fonction :

$$g : \begin{cases} [-6; 2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 1 \end{cases}$$

2. a. Déterminer la dérivée de  $g$  sur  $[-6; 2]$  puis étudier son signe sur cet intervalle.
2. b. En déduire les variations de  $g$  sur  $[-6; 2]$ . On fera clairement figurer les images par  $g$  des bornes de l'intervalle d'étude et des racines de  $g'$ .
2. c. Vérifiez que ces résultats sont cohérents avec ceux de la question 1.
3. **Approximation de la solution d'une équation.**  
On cherche à résoudre l'équation  $g(x) = 5$ . C'est une équation de degré 3 que l'on ne sait pas résoudre à notre niveau.
  3. a. Montrer que l'équation  $g(x) = 5$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[-6; 2]$ . Donner un intervalle comprenant  $\alpha$  sur lequel la fonction est monotone.
  3. b. Donner une valeur approchée de  $\alpha$  au centième.

**Exercice 5. (Spoil Alert!) Une fonction auxiliaire  $g$  pour étudier  $f$  et des applications (c)****Point Bac : Utilisation d'une fonction auxiliaire.**

C'était un grand classique il y a quelques années. On rencontre tout de même encore assez souvent ce genre d'exercice.

**Méthode 4**

On introduit une fonction  $g$  qui va en fait permettre d'étudier le signe de la dérivée de  $f$  (la dérivée  $f'$  s'exprime en fonction de  $g$  et d'un facteur positif très souvent).

Il faut donc ne pas perdre de vue que l'unique intérêt de  $g$ , est son **SIGNE**. On va donc :

- Étudier les variations de  $g$ .
- Résoudre l'équation  $g(x) = 0$ . Pour cela on utilise le TVI pour dénombrer les solutions puis on trouve des valeurs approchées de ces dernières.
- En déduire le signe de  $g$ . On utilisera généralement le tableau de variation de  $g$  en plaçant les solutions de l'équation  $g(x) = 0$ .
- Le signe de  $g$  nous donne alors celui de  $f'$  et donc les variations de  $f$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, 5 ; 10]$  par :

$$f : \begin{cases} [0, 5 ; 10] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 5}{x} \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de  $f$  et vérifier que pour tout  $x$  de  $[0, 5 ; 10]$  :

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 - 5}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

2. Étude d'une fonction auxiliaire  $g$ .

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0, 5 ; 10]$  par  $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 5$ .

2. a. Expliquer rapidement pourquoi  $f'$  est du signe de  $g$  sur  $[0, 5 ; 10]$ .
2. b. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur  $[0, 5 ; 10]$ .
2. c. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0, 5 ; 10]$  et en donner un encadrement au millième.
2. d. En déduire le signe de  $g$  sur  $[0, 5 ; 10]$ .
2. e. En déduire alors les variations de  $f$  sur  $[0, 5 ; 10]$ .

3. Applications économiques.

Le coût moyen de production d'une entreprise est donné par  $f(x)$  où  $x$  est la quantité produite en milliers d'unités, variant de 0,5 à 10 milliers d'unités de production, et  $f(x)$  est exprimée en centaines d'euros.

3. a. Déterminer une valeur approchée à l'unité, du coût moyen minimum de production.
3. b. Déterminer, à partir de quelle production, le coût moyen dépasse les 10 600 euros.

4. Complément (question indépendante de la question 3).

4. a. Montrer que  $\alpha$  vérifie l'égalité :

$$f(\alpha) = -\frac{3}{2}\alpha + 1 + \frac{15}{2\alpha}$$

4. b. On suppose que  $1 < \alpha < 1,5$ . En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .

**Exercice 6. Encore une fonction auxiliaire**

On cherche à étudier la fonction  $f$  définie sur  $] - 1 ; 1[ \cup ] 1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$$

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 3x - 4$ .
  1. a. Dresser le tableau de variations de  $g$  (justifier).
  1. b. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution réelle  $\alpha$ , et déterminer le signe de  $g(x)$  en fonction de  $x$ .
  1. c. Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
2. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $] - 1 ; 1[ \cup ] 1 ; +\infty[$  et vérifier que :

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

3. En déduire les variations de la fonction  $f$  et dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
4. Complément.

4. a. Montrer que  $\alpha$  vérifie l'égalité :

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1}$$

4. b. On suppose que  $2 < \alpha < 3$ . En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .

**Troisième partie****EPI et exercices plus théoriques**

Un exercice à prise d'initiative (EPI) est un exercice non guidé. Le candidat devra faire preuve d'initiative, introduire une fonction par exemple permettant de résoudre le problème posé.

**Exercice 7. EPI : Point fixe (c)**

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[0; 1]$ , à valeurs dans  $[0; 1]$ .  
Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution dans  $[0; 1]$ .

**Exercice 8. EPI : Résolution d'une équation (c)**

Résoudre sur l'intervalle  $[1; 9]$  l'équation (E) :

$$2x^3 + 3x^2 - 120x + 1 = 0$$

**Exercice 9. Vrai ou Faux (c)**

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

**Affirmation 1**

Soit  $g$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  telle que :

- la fonction  $g$  est dérivable et strictement décroissante sur  $[0; 1]$  ;
- On a :  $g(0) = 5$  et  $g(1) = 2$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par :

$$f(x) = (g(x))^2$$

Alors l'équation  $f(x) = 6$  admet une unique solution sur  $[0; 1]$ .

**Affirmation 2**

Soit  $m$  un réel et  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} h(x) = -x^2 + m & \text{si } x \leq 3 \\ h(x) = -2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La fonction  $h$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ , quelle que soit la valeur de  $m$ .

← Fin du TD →

# Quatrième partie

## Corrections de exercices

### Correction de l'exercice 1 page 1

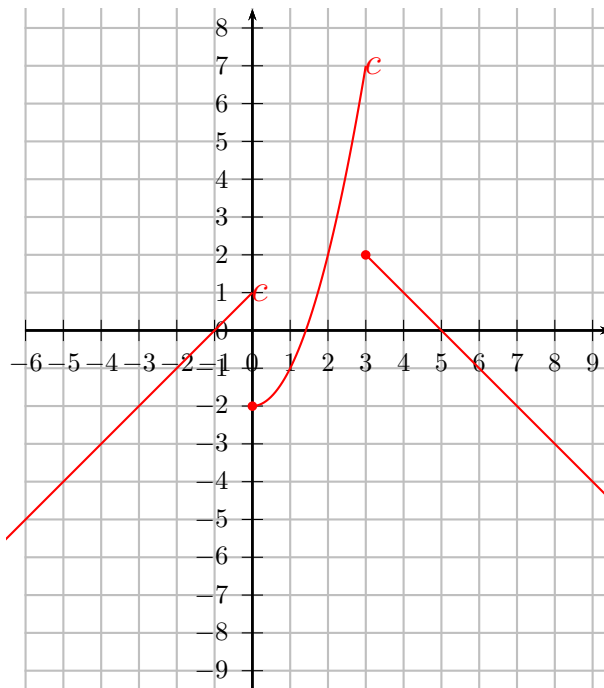
1. Écrire un algorithme qui permet de calculer l'image d'une valeur demandée, par la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h : x \mapsto h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



#### Code Python

```
def h(x):
    if x < 0:
        y = x + 1
    elif x < 3: # ici 0 <= x < 3
        y = x^2 - 2
    else: # ici x >= 3
        y = 5 - x
    return y
```



2. Tracer  $\mathcal{C}_h$  dans le repère ci-contre.
3. La fonction  $h$  est-elle continue? Justifier en utilisant la définition du cours.



#### Définition : Fonction continue

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

- La fonction  $f$  est continue en  $a$  si la limite de  $f$  en  $a$  existe et donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- La fonction  $f$  est continue sur  $I$  lorsque pour tout réel  $a$  de  $I$ , elle est continue en  $a$ .
- Interprétation graphique** : dire que  $f$  est continue sur  $I$  cela signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

La fonction semble présenter 2 points de discontinuité en 0 et en 3.

- En  $x = 0$ .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1 \end{cases} \implies f \text{ n'est pas continue en } 0 \text{ car les limites à droite et à gauche sont différentes}$$

- En  $x = 3$ .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 5 - x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 2 = 7 \end{cases} \implies f \text{ n'est pas continue en } 3 \text{ car les limites à droite et à gauche sont différentes}$$

**Correction de l'exercice 2**

Étudier la continuité de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ -e^{x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  car elle est égale sur cet intervalle à  $x \mapsto x^2 - 1$  qui est une fonction polynôme.
- La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_-^*$  car elle est égale sur cet intervalle à  $x \mapsto -e^{x^2}$  qui est continue car de la forme  $k e^u$  avec  $u$  continue.
- Il reste à étudier la continuité en 0. Pour cela on calcule les limites à droite et à gauche .

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -e^{x^2} = -1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 - 1 = -1 \end{cases} \implies f \text{ est continue en } 0 \text{ car les limites à droite et à gauche sont égales.}$$

**Correction de l'exercice 5 : Fonction auxiliaire et application**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, 5 ; 10]$  par :

$$f : \begin{cases} [0, 5 ; 10] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 5}{x} \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de  $f$  et vérifier que pour tout  $x$  de  $[0, 5 ; 10]$  :  $f'(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 - 5}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

La fonction  $f$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $[0, 5 ; 10]$ . Elle est de la forme  $\frac{u}{v}$  donc de dérivée  $\frac{u'v - uv'}{v^2}$  avec :

$u(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$	$u'(x) = (6x^2 - 6x + 1)$
$v(x) = x$	$v'(x) = 1$

Pour tout réel  $x$  de  $[0, 5 ; 10]$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ f(x) &= \frac{(6x^2 - 6x + 1) \times (x) - (2x^3 - 3x^2 + x + 5) \times (1)}{(x)^2} \\ f(x) &= \frac{6x^3 - 6x^2 + x - 2x^3 + 3x^2 - x - 5}{(x)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0, 5 ; 10] ; \boxed{f'(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 - 5}{(x)^2}}$$

2. Étude d'une fonction auxiliaire  $g$ .

2. a. Expliquer rapidement pourquoi  $f'$  est du signe de  $g$  sur  $[0, 5 ; 10]$ .

Puisque  $x^2$  le dénominateur de la dérivée est strictement positif sur  $[0, 5 ; 10]$ ,  $f'$  est du signe de  $g$  sur  $[0, 5 ; 10]$ .

2. b. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur  $[0, 5 ; 10]$ .

La fonction  $g$  est définie et dérivable sur  $[0, 5 ; 10]$  car c'est une fonction polynôme. On a facilement pour tout réel  $x$  de  $[0, 5 ; 10]$  :

$$g'(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1)$$

On obtient alors une fonction polynôme du second degré dont les racines sont évidentes :

$$g'(x) = 0 \iff 6x(2x - 1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \notin [0, 5 ; 10] \\ \text{ou} \\ x = \frac{1}{2} \in [0, 5 ; 10] \end{cases}$$

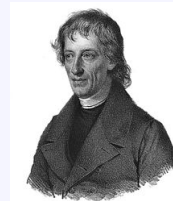
$g'$  est alors du signe de  $a = 12 >$  (le coefficient de  $x^2$ ) à l'extérieur des racines soit :

$x$	0.5	$\alpha$	10
Signe de $g'(x)$		+	
Variations de $g$			

2. c. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0, 5 ; 10]$  et en donner un encadrement au millième.

**Théorème 1** (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si  $f$  est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle  $[a ; b]$ , alors, pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet une unique solution dans  $[a ; b]$ .



**Remarque :** La première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

- Application du corollaire sur  $[0, 5 ; 10]$  :
  - La fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $[0, 5 ; 10]$  ;
  - Le réel  $k = 0$  est compris entre  $f(0, 5) = -5, 25$  et  $f(10) = 3695$
  - Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0, 5 ; 10]$ .
- Valeur approchée .  
 Pour avoir un encadrement de  $\alpha$ , on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de  $\Delta = 0.001$  on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(1, 393) \approx -0, 009 < 0 \\ g(1, 394) \approx 0, 006 > 0 \end{array} \right. , \text{ donc } \underline{1, 393 < \alpha < 1, 394}.$$

2. d. En déduire le signe de  $g$  sur  $[0, 5 ; 10]$ .

On a vu que  $g$  était croissante sur  $[0, 5 ; 10]$  :

$x$	0.5	$\alpha$	10
Variations de $g$			

Donc on a :

$x$	0.5	$1.393 < \alpha < 1.394$	10
Signe de $g(x)$		- 0 +	

2. e. En déduire alors les variations de  $f$  sur  $[0, 5 ; 10]$ .

On a démontré lors de la question (2.a.) que le signe de  $g$  nous donnait celui de  $f'$  donc :

$x$	0.5	$1.393 < \alpha < 1.394$	10
Signe de $f'(x)$		- 0 +	
Variations de $f$			

3. Applications économiques.

Le coût moyen de production d'une entreprise est donné par  $f(x)$  où  $x$  est la quantité produite en milliers d'unités, variant de 0,5 à 10 milliers d'unités de production, et  $f(x)$  est exprimée en centaines d'euros.

3. a. **Déterminer une valeur approchée à l'unité, du coût moyen minimum de production.**

D'après la question (3.), le coût moyen de production est obtenu pour une production comprise entre 1 393 et 1 394 unités ! On n'a donc que deux choix possibles, testons-les :

$$\begin{cases} f(1,393) \approx 4,291273 \\ f(1,394) \approx 4,291273 \end{cases}$$

On peut donc affirmer, qu'avec cette modélisation, le coût moyen minimum de production est de 4,291273 centaines d'euros soit 429 euros en arrondissant à l'unité d'euros.

3. b. **Déterminer, à partir de quelle production, le coût moyen dépasse les 10 600 euros.**

• Sur  $[0; \alpha]$ , le maximum de  $f$  est 10 donc le coût moyen ne dépasse pas 106 centaines d'euros.

• La fonction  $f$  est strictement croissante et continue sur  $[\alpha; 10]$  et la calculatrice donne :

$$\begin{cases} f(8,012) \approx 105,9724 < 106 \\ f(8,013) \approx 106,0013 > 106 \end{cases}$$

Le coût moyen dépasse les 10 600 euros à partir d'une production de 8 013 unités.

4. Complément (question indépendante de la question 3).

Montrer que  $\alpha$  vérifie l'égalité :  $f(\alpha) = -\frac{3}{2}\alpha + 1 + \frac{15}{2\alpha}$

Puisque  $g(\alpha) = 0$  on a :

$$g(\alpha) = 0 \iff 4\alpha^3 - 3\alpha^2 - 5 = 0 \iff 4\alpha^3 = 3\alpha^2 + 5$$

Par ailleurs

$$f : \begin{cases} [0,5; 10] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 5}{x} \end{cases}$$

Donc a :

$$2f(\alpha) = \frac{4\alpha^3 - 6\alpha^2 + 2\alpha + 10}{\alpha}$$

On remplace alors  $4\alpha^3$  par  $3\alpha^2 + 5$

$$2f(\alpha) = \frac{3\alpha^2 + 5 - 6\alpha^2 + 2\alpha + 10}{\alpha} = \frac{-3\alpha^2 + 2\alpha + 15}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{-3\alpha^2 + 2\alpha + 15}{2\alpha} \implies \boxed{f(\alpha) = -\frac{3}{2}\alpha + 1 + \frac{15}{2\alpha}}$$

Or on sait que :  $1 < \alpha < 1,5$ .

Par ailleurs la fonction  $h : x \longmapsto -\frac{3}{2}x + 1 + \frac{15}{2x}$  est clairement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , car de dérivée  $h' : x \longmapsto -\frac{3}{2} - \frac{15}{2x^2}$  négative sur cet intervalle donc :

$$1 < \alpha < 1,5 \implies h(1,5) \leq h(\alpha) \leq h(1) \implies \boxed{3,75 < f(\alpha) < 7}$$

**Correction de l'exercice 7 : théorème du point fixe**

Notons  $g$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $g(x) = f(x) - x$ .

La fonction  $g$  est continue sur  $[0; 1]$  comme différence de deux fonctions qui le sont.

Or puisque  $f$  prend ses valeurs dans  $[0; 1]$  on a :

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \geq 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet au moins une solution sur  $[0; 1]$ .

Ainsi l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution sur  $[0; 1]$ .

### Correction de l'exercice 9 : Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

#### Affirmation 1

Soit  $g$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  telle que :

- la fonction  $g$  est dérivable et strictement décroissante sur  $[0 ; 1]$ ;
- On a :  $g(0) = 5$  et  $g(1) = 2$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par :

$$f(x) = (g(x))^2$$

Alors l'équation  $f(x) = 6$  admet une unique solution sur  $[0 ; 1]$ .

- La fonction  $g$  est définie et dérivable sur  $[0 ; 1]$  donc  $f$  l'est aussi et pour  $x$  de  $[0 ; 1]$  on a :

$$f'(x) = 2g(x) \times g'(x)$$

- La fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $[0 ; 1]$  ( et continue car dérivable) donc elle admet comme minimum  $g(1) = 2$  et on obtient :

$x$	0	1
Signe de $g'(x)$	-	
Variations de $g$	5	2

- De ce fait  $g$  est strictement positive sur  $[0 ; 1]$  et donc  $f'$  est du signe de  $g'$ .

Puisque  $g$  est décroissante,  $g'$  est strictement négative ce qui nous donne le signe de  $f'$  et donc les variations de  $f$  :

$x$	0	1
Signe de $f'(x) = 2g(x) \times g'(x)$	-	
Variations de $f$	$f(0) = g(0)^2 = 25$	$f(1) = g(1)^2 = 4$

- On peut appliquer le corolaire du TVI :

- Sur  $[0 ; 1]$   $f$  est continue car  $g$  l'est et dérivable.
- le réel  $k = 6$  est compris entre  $f(0) = g(0)^2 = 25$  et  $f(1) = g(1)^2 = 4$ .
- Donc d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $f(x) = 6$  admet une unique solution sur  $[0 ; 1]$ .

- **Conclusion : l'affirmation 1 est vraie.**

**Affirmation 2**

Soit  $m$  un réel et  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} h(x) = -x^2 + m & \text{si } x \leq 3 \\ h(x) = -2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La fonction  $h$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ , quelle que soit la valeur de  $m$ .

- Sur l'intervalle  $]-\infty ; 3]$  la fonction  $h$  est continue car c'est une fonction polynôme du second degré. Sur l'intervalle  $]3 ; +\infty[$  la fonction  $h$  est continue car c'est une fonction affine. Le problème se pose donc en 3.
- On a  $h(3) = -3^2 + m = m - 9$ .
- Par ailleurs, si  $x$  tend vers 3 en étant supérieur à 3,  $h(x)$  tend vers  $-2 \times 3 - 1 = -7$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (-2x - 1) = -7$$

- En prenant  $m = 2$  on aura donc la continuité en 3 et la fonction, sera continue sur  $\mathbb{R}$ . En effet on aura bien :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = f(3) = -7$$

- **Conclusion : l'affirmation 2 est fausse.**