Math93.com

TD 3 - Terminale Spécialité maths
Compléments dérivation et convexité

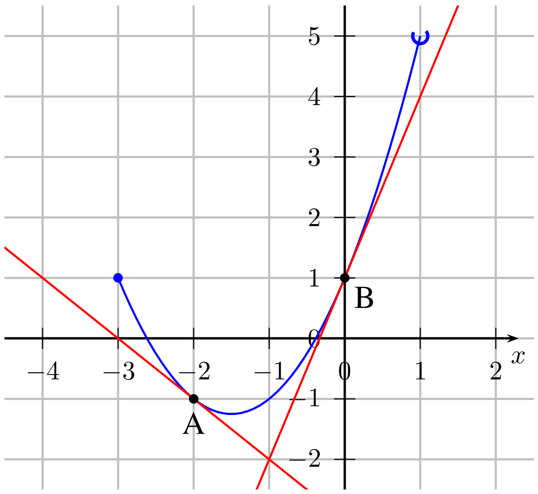
Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Première partie
Fonctions et dérivation : lectures graphiques

Exercice 1. Lectures graphiques

1.1 Lecture graphique puis calculs (c)

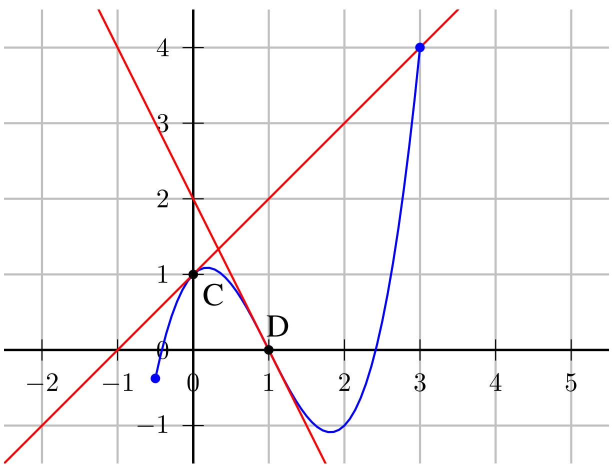
On a tracé $\mathscr{C}_f$, la courbe de f définie et dérivable sur $[-3\ ;\ 1[$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -2 et 0.



1. Lecture du nombre dérivé :
$$f'(-2)=\cdots\cdots$$
2. Équation de T_{-2}, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A(-2\ ;\ -1)$:
$$y=\cdots\cdots$$
3. Lecture du nombre dérivé :
$$f'(0)=\cdots\cdots$$
4. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $B(0\ ;\ 1)$:
$$y=\cdots\cdots$$
5. f est en fait la fonction définie sur $[-3\ ;\ 1[$ par $f(x)=x^2+3x+1$. Retrouver les résultats des premières questions.

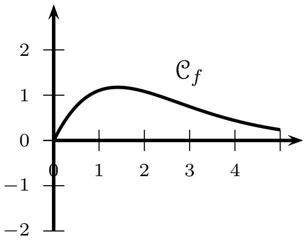
1.2 Lecture graphique puis calculs (c)

On a tracé $\mathscr{C}_g$ la courbe de g définie et dérivable sur $[-0.5\ ;\ 3]$ ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}_g$ aux points $C(0\ ;\ g(0)$ et $D(1\ ;\ g(1))$.

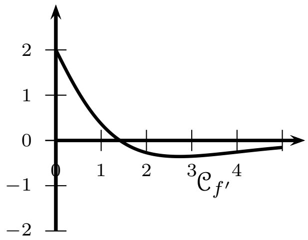


1. Lecture du nombre dérivé :
$$g'(0)=\cdots\cdots$$
2. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $C(0\ ;\ 1)$:
$$y=\cdots\cdots$$
3. Lecture du nombre dérivé :
$$g'(1)=\cdots\cdots$$
4. Équation de T_1, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $D(1\ ;\ 0)$:
$$y=\cdots\cdots$$
5. g est en fait la fonction définie sur $[-0.5\ ;\ 3]$ par $g(x)=x^3-3x^2+x+1$. Retrouver les résultats des premières questions.

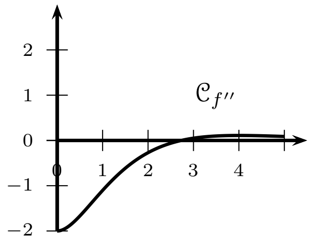
Exercice 2. Lectures graphiques - D'après Bac (c)



Courbe $\mathcal{C}_f$



Courbe $\mathcal{C}_{f'}$



Courbe $\mathcal{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathcal{C}_{f'}$ et $\mathcal{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.
Les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.

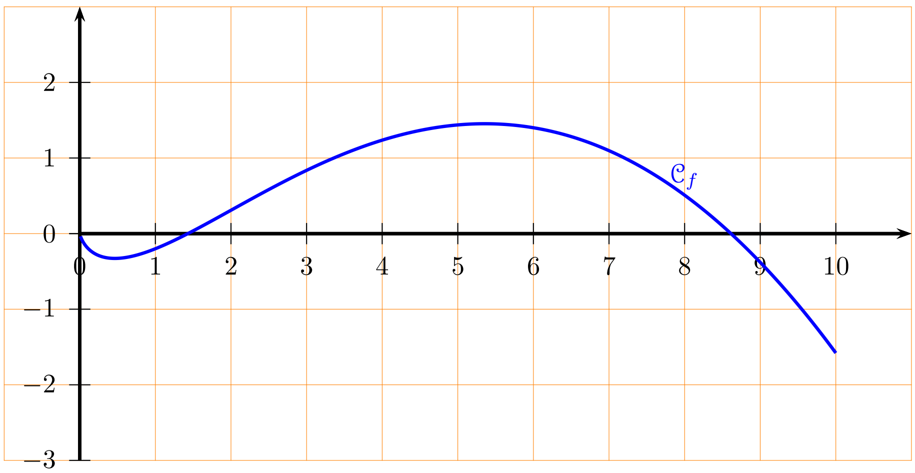
2. Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

   $y = x$ $\qquad$ $y = 2x + 1$ $\qquad$ $y = 2x$ $\qquad$ $y = \dfrac{3}{4}x$

3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : "La fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 5]$".

Exercice 3. Lectures graphiques - QCM d'après Bac (c)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O :



On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0; 10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

   a. 1 $\qquad$ **b.** 2 $\qquad$ **c.** 3

2. Le nombre réel $f'(7)$ est :

   a. nul $\qquad$ **b.** strictement positif $\qquad$ **c.** strictement négatif

3. La fonction f' est :

   a. croissante sur $]0; 10]$ $\qquad$ **b.** croissante sur $[4; 7]$ $\qquad$ **c.** décroissante sur $[4; 7]$

Deuxième partie

Fonctions : dérivation et problèmes de tangentes

Exercice 4. Des problèmes de tangentes 1 (c)

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$.

1. a. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ dont la tangente à parallèle à la droite (d) d'équation $y = 2x + 1$.

1. b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (d).

2. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 2$.
Montrer qu'il existe un unique point de $\mathscr{C}_g$ tel que la tangente à $\mathscr{C}_g$ en ce point passe par l'origine.

Exercice 5. Un problème de tangentes 2 (c)

f et g sont des fonctions définies sur R par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier le sens de variation de chaque fonction.

2. Étudier les intersections éventuelles de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune en O.

Exercice 6. Un problème de tangentes 3 (c)

Soit f définie sur R par :

$$f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes qui passent par l'origine du repère ?

Exercice 7. Position relative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

3. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$.

Exercice 8. Avec la valeur absolue

Définition 1 (Valeur absolue)

Pour x réel, la valeur absolue de x, notée $|x|$ est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a par exemple : $|-2| = 2$ et $|5| = 5$.

1. Étudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$.

2. a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, et calculer la dérivée $f'(x)$.

2. b. f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

2. c. Visualiser $\mathscr{C}_f$ sur votre calculatrice (ou sur Geogebra).

Exercice 9. De l'intérêt de la dérivée seconde (c)

Soit f la fonction définie sur $[-5\ ;\ 5]$ par :

$$f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}$$

1. Déterminer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de f sur $[-5\ ;\ 5]$.

2. Étudier le signe de f'' selon les valeurs de x.

3. En déduire le sens de variation de la dérivée f'.

4. Montrer que f' s'annule deux dois sur $[-5\ ;\ 5]$. Une fois en (-1) et une autre fois en α dont on donnera un encadrement.

5. En déduire le signe de f' puis les variations de f sur $[-5\ ;\ 5]$.

Troisième partie
Convexité

Exercice 10. Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction

1. ▷ Lire et refaire la **capacité 5 page 207** du Indice - Bordas : Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction.

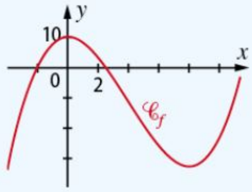
CAPACITÉ 5

Déterminer graphiquement la convexité d'une fonction

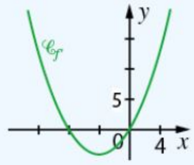
Dans chacun des cas ci-dessous :
- déterminer par lecture graphique les intervalles sur lesquels la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, est convexe et les intervalles sur lesquels elle est concave ;
- préciser les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

a. On donne sur le **graphique 1** la courbe représentative de la fonction f.

b. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne sur le **graphique 2** la courbe représentative $\mathscr{C}_{f'}$ de la fonction dérivée de f.



Graphique 1



Graphique 2

2. Faire les exercices 68, 69, 70 et 71 page 216/217.

Exercice 11. Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction

1. ▷ Lire et refaire la **capacité 7 page 208** du Indice - Bordas :Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction.

CAPACITÉ 7

Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

a. Montrer que f est convexe.

b. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 0.

c. En déduire que quel que soit le réel x : $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.

2 Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

a. Étudier la convexité de f.

b. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 0.

c. En déduire que pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$: $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + 0{,}5x$.

3 En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, démontrer que pour tous réels a et b : $\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$.

2. Faire les exercices 89, 90, 91 et 92 page 219.

Quatrième partie

Problèmes

Exercice 12. Utiliser la convexité dans la résolution de problèmes

1. ▷ Lire et refaire la **capacité 8 page 209** du Indice - Bordas : Utiliser la convexité dans la résolution de problèmes.

CAPACITÉ 8

Étudier et utiliser la convexité d'une fonction dans la résolution de problème

La fréquentation de touristes d'une station balnéaire pour l'été 2019 a été modélisée par une fonction f, définie sur $[0\,;90]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-contre ; x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $f(x)$ désigne la féquentation en milliers de touristes, ainsi $f(30)$ représente le nombre de touristes qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.

On estime qu'un touriste utilise chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau.

1 Dans cette question, les réponses sont à fournir par lecture graphique.

a. Estimer le nombre maximal de touristes présents dans la station balnéaire selon ce modèle durant l'été 2019 et préciser à quelle date ce maximum serait atteint.

b. La commune peut fournir 600 000 litres d'eau par jour. Est-ce suffisant ?

2 Estimer le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants de la station balnéaire devrait rester supérieur à 80 % du nombre maximal prévu.

3 On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;90]$ par :

$$f(x) = 2 + 0{,}2x\,e^{-0{,}025x+1}.$$

a. Démontrer que la fonction dérivée est $f'(x) = 0{,}2(1 - 0{,}025x)e^{-0{,}025x+1}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;90]$.

c. Donner le jour où la fréquentation est maximale.

d. En prenant 50 litres comme consommation quotidienne par habitant, calculer la consommation le jour où la fréquentation est maximale.

4 On admet que pour tout réel $x \in [0\,;90]$, $f''(x) = 0{,}000\,125e^{-0{,}025x+1}(-80 + x)$. En justifiant la démarche, déterminer la valeur de x à partir de laquelle la fréquentation va décroître moins rapidement et déterminer alors le jour correspondant.

2. Faire l'exercice 74 page 217.

↫ **Fin du TD** ↬

Cinquième partie
Corrections de exercices

Correction de l'exercice 1

12.1 Lectures graphiques

Réponses

$f'(-2) = -1$; $T_{-2}\ :\ y = -x - 3$; $f'(0) = 3$; $T_0\ :\ y = 3x + 1$

12.2 Lectures graphiques

Réponses

$g'(0) = 1$; $T_0\ :\ y = x + 1$; $g'(1) = -2$; $T_1\ :\ y = -2x + 2$

Correction de l'exercice 2

1. **Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.**
   La fonction f semble atteindre son maximum en $x = m$ avec $\underline{1 < m < 2}$.

   La fonction dérivée f' s'annule entre 1 et 2 en changeant de signe, ce qui est la caractéristique d'un extremum local.

2. **Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?**
   a. $y = x$, **b.** $y = 2x + 1$, **c.** $y = 2x$, **d.** $y = \frac{3}{4}x$.

   - Sur la courbe $\mathcal{C}_{f'}$: l'image de 0 est 2 par f' soit $f'(0) = 2$;
   - Sur la courbe $\mathcal{C}_f$: l'image de 0 est 0 par f soit $f(0) = 0$;
   - Équation
     L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$ est

     $$(T)\ :\ y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

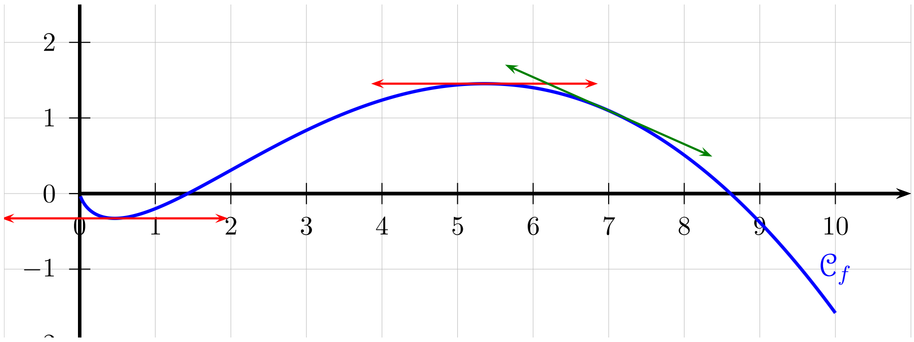
     Donc ici on obtient :

     $$\left\{\begin{array}{ll} f(0) & = +0 \\ f'(0) & = 2 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow (T)\ :\ y = 2 \times (x - 0) + 0 \implies \boxed{y = 2x}$$

3. **Que pensez-vous de l'affirmation suivante : "La fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 5]$".**
   La fonction dérivée seconde f'' est visiblement positive sur $[3; 5]$ donc la fonction dérivée f' est croissante sur cet intervalle.

Correction de l'exercice 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Question 1 (Réponse b)

Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0\,;10]$ de l'équation $f'(x)=0$ est égal à :

a. 1 $\qquad$ $\boxed{\textbf{b.}\ 2}$ $\qquad$ **c.** 3

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Les solutions sur l'intervalle $]0\,;\ 10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ sont donc les abscisses des points de la courbe qui admettent une tangente horizontale. Ils sont au nombre de 2 car la courbe semble posséder deux tangentes horizontales sur cet intervalle (en rouge).

Question 2 (Réponse c)

Le nombre réel $f'(7)$ est :

a. nul $\qquad$ **b.** strictement positif $\qquad$ $\boxed{\textbf{c.}\ \text{strictement négatif}}$

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Le nombre $f'(7)$ est donc négatif car la tangente à la courbe au point d'abscisse 7 semble être de coefficient directeur strictement négatif (en vert).

Question 3 (Réponse c)

La fonction f' est :

a. croissante sur $]0\,;10]$ $\qquad$ **b.** croissante sur $[4\,;7]$ $\qquad$ $\boxed{\textbf{c.}\ \text{décroissante sur } [4\,;7]}$

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Sur l'intervalle $[4\,;7]$, le coefficient directeur des tangentes à la courbe ont des coefficients directeurs de plus en plus petit, donc la fonction f' est bien décroissante sur cet intervalle.

Correction de l'exercice 4

1. **Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ dont la tangente à parallèle à la droite d'équation $y = 2x + 1$.**
   La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$.

   Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ dont la tangente à parallèle à la droite d'équation $y = 2x + 1$ c'est déterminer les solution de l'équation $f'(x) = 2$ soit :

$$f'(x) = 2 \iff 3x^2 - 10x + 2 = 2 \iff x(3x - 10) = 0 \iff \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{10}{3}\right)$$

2. **Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 2$. Montrer qu'il existe deux points de $\mathscr{C}_g$ tel que la tangente à $\mathscr{C}_g$ en ce point passe par l'origine.**
   La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel x, $g'(x) = 2x$.

   L'équation de la tangente $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse a est d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \iff y = 2a(x - a) + (a^2 + 2) \iff y = 2ax - a^2 + 2$$

   La tangente à $\mathscr{C}_g$ en ce point passe par l'origine si et seulement si $-a^2 + 2 = 0$ or pour $a \in \mathbb{R}$

$$-a^2 + 2 = 0 \iff a^2 = 2 \iff \left(a = \sqrt{2} \text{ ou } a = -\sqrt{2}\right)$$

Correction de l'exercice 5

f et g sont des fonctions définies sur R par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
*On donne juste **des éléments de correction**, cela ne constitue pas une rédaction ...*

1. Étudier le sens de variation de chaque fonction.

$$f'(x) = (x + 1)\,\mathrm{e}^{x} \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \frac{1 - x}{\mathrm{e}^{x}}$$

   Donc f croissante sur $[-1\,;\,+\infty[$ et décroissante ailleurs.
   g décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ et croissante ailleurs.

2. Étudier les intersections éventuelles de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

$$f(x) = g(x) \iff x = 0$$

   Or $f(0) = g(0) = 0$ donc les courbes se croisent en O(0 ; 0).

3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune en O.
   - Tangente à $\mathscr{C}_f$ en O d'équation : $y = x$.
   - Tangente à $\mathscr{C}_g$ en O d'équation : $y = x$.

Correction de l'exercice 6

*On donne juste **des éléments de correction**, cela ne constitue pas une rédaction ...*

Soit f définie sur R par : $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes qui passent par l'origine du repère ?
On a :

$$f'(x) = (2x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) = f'(a)x - af'(a) + f(a)$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes qui passent par l'origine du repère si et seulement si $-af'(a)+f(a)=0$ soit :

$$-af'(a)+f(a)=0-a(2a-a^2)\,\mathrm{e}^{-x}+a^2\,\mathrm{e}^{-a}=0$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}-af'(a)+f(a)=0 &\iff -a(2a-a^2)+a^2=0\\ &\iff a^3-a^2=0\\ &\iff a^2(a-1)=0\\ &\iff a=0 \text{ ou } a=1\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9

Soit f la fonction définie sur $[-5\ ;\ 5]$ par : $f(x)=x-\dfrac{2}{x^2+1}$.

On donne juste des éléments de réponses, cela ne constitue pas une correction.

1. **Déterminer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de f sur $[-5\ ;\ 5]$.** Pour x de $[-5\ ;\ 5]$ on a :

$$f'(x)=1+\frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad\text{et}\quad f''(x)=\frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^4}$$

2. **Étudier le signe de f'' selon les valeurs de x.**
Pour x de $[-5\ ;\ 5]$, le facteur $\dfrac{4}{(x^2+1)^4}$ est strictement positif donc f'' est du signe de l'expression polynôme du second degré $(1-3x^2)$ dont les racines sont $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. f'' est donc du signe de $a=-3<0$ à l'extérieure des racines soit :

x	-5	-1		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		α		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		5
Signe de $f''(x)$		$-$		0		$+$		0	$-$	
Variations de f'	$\frac{164}{169}$	0		$1-\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx -0.3$		0		$1+\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx 2.3$		$\frac{174}{169}$

3. **En déduire le sens de variation de la dérivée f'.**

4. **Montrer que f' s'annule deux dois sur $[-5\ ;\ 5]$. Une fois en (-1) et une autre fois en α dont on donnera un encadrement.**
On applique le corollaire du TVI et on obtient par balayage que : $-0,3<\alpha<-0,2$.

5. **En déduire le signe de f' puis les variations de f sur $[-5\ ;\ 5]$.**
On en déduit alors le signe de f' puis les variations de f :

x	-5		-1		α		5
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\frac{66}{13}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$\frac{64}{13}$