Math93.com

TD 1 - Terminale Spécialité maths
Limites de fonctions

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Première partie
Détermination de limites et asymptotes

▷ *<u>Asymptote et interprétation graphique</u> : Lire et refaire les **capacités 1 et 2 page 167** du Indice - Bordas.*

▷ *<u>Limites</u> : Lire et refaire les **capacités 3, 4, 5 page 169/171** du Indice - Bordas.*

Exercice 1. Asymptotes

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. Déterminer les équations des asymptotes.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
Variations de f	3	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	10

Exercice 2. Du classique (c)

Dans cet exercice, vous préciserez les éventuelles asymptote aux courbes représentatives.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $f(x) = \dfrac{6-x}{x-5}$.

   Étudier les limites de f en 5 (à gauche et à droite), en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{x-1}$.

   Étudier les limites de g en 1 (à gauche et à droite), en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Soit h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $h(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$.

   Étudier les limites de h en 1 (à gauche et à droite), en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Soit k définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\ ;\ 2\}$ par $k(x) = \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$.

   Étudier les limites de k en 1 (à gauche et à droite), en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 3. Levez l'indétermination $0/0$ (c)

Méthode

Dans cet exercice, on va lever l'indétermination $0/0$ quand x tend vers a en factorisant les polynômes du second degré. On devrait obtenir un facteur $(x-a)$.

1. Soit f définie sur D_f par $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$.

1. a. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.

1. b. Étudier les limites de f en 1.

Aide

Factoriser x^2-3x+2 puis simplifier l'expression de f.

1. c. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Soit g définie sur D_g par $g(x) = \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$.

2. a. Déterminer D_g, l'ensemble de définition de g.

2. b. Étudier les limites de g en 3 (à gauche et à droite).

Aide

Factoriser numérateur et dénominateur puis simplifier l'expression de g.

2. c. Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 4. Levez l'indétermination $0/0$

Méthode

L'astuce ici pour lever l'indétermination de la limite en a, est d'essayer de factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$ ou $(\sqrt{x}-\sqrt{a})$ par exemple .

1.

1. a. Montrer que pour tout réel $x \neq 1$ on a :

$$1+x+x^2+x^3 = \frac{x^4-1}{x-1}$$

1. b. Déterminer

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^2-3x+2}$$

2. Déterminer

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$$

Exercice 5. Un exercice théorique avec le nombre dérivé

Propriété 1

1. Le réel $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a ;
2. Le réel $f'(a)$ est la limite quand h tend vers 0 du taux $t(h)$:

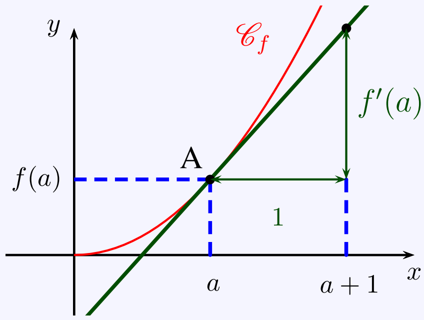
$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

3. Le réel $f'(a)$ est la limite quand x tend vers a de :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

4. Le réel $f'(a)$ est le coefficient directeur de la **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$** au point $A\,(a\,;\,f(a))$ et l'équation de cette tangente est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et a un réel quelconque. On suppose que $g'(a) \neq 0$. Déterminer les limites :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$.

Aide
Poser $h(x) = xf(a) - af(x)$ et calculer $h(a)$.

2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$

Exercice 6. Avec la quantité conjuguée

Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 5}$$

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
2. Montrer que pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5} - x}$$

3. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.

Exercice 7. Avec la quantité conjuguée

Soit f la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(h) = \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$$

Démontrer que :

$$\lim_{h \to 0^+} f(h) = \frac{1}{4}$$

Exercice 8. Avec la valeur absolue

Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x + |x|}{7x - 5|x|}$$

Déterminer

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ | **2.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ | **3.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ | **4.** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ | **5.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Réponses

(1) 2 , *(2)* $\frac{1}{6}$, *(3)* 2 , *(4)* $\frac{1}{6}$, *(5) n'existe pas*

Deuxième partie

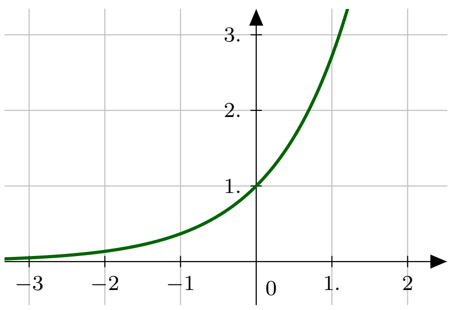
Fonction composée

▷ *Lire et refaire la **capacité 6 page 171** du Indice - Bordas.*

Exercice 9. Fonctions composée et fonction exponentielle (c)

Rappels de première :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $(e^x)' = \mathrm{e}^x$		$+$		
Variations de exp	0	1	$\mathrm{e} \approx 2.718$	$+\infty$



$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty}$

1. On va détailler la recherche de la limite de $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x+2}$ en $+\infty$. On va utiliser une fonction composée.

$$x \longmapsto 3x+2$$
$$X \longmapsto \mathrm{e}^X$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 3x+2 = \cdots \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = \cdots \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^{3x+2} = \cdots}$$

2. Calculer avec cette méthode de composition, la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

2. a. $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x-1}$;

2. b. $x \longmapsto \dfrac{5}{\mathrm{e}^{5x-3}}$;

2. c. $x \longmapsto \mathrm{e}^{-4x-1}$.

Troisième partie

Détermination de limites et théorèmes de comparaison

▷ *Lire et refaire la* ***capacité 7 page 173*** *du Indice - Bordas.*

Exercice 10. Avec la fonction exponentielle (c)

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty}$$

On reprend l'exercice 9 page 4 en utilisant maintenant les théorèmes de comparaison.

1. On va détailler la recherche de la limite de $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x+2}$ en $+\infty$.

1. a. Méthode 1.

1. a. 1. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\mathrm{e}^{3x+2} > \mathrm{e}^{x}$.

1. a. 2. En déduire alors la limite de $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x+2}$ en $+\infty$.

1. b. Méthode 2 : on peut le faire aussi avec les fonctions composées (cf exercice 9).

2. Calculer avec la méthode de comparaison, la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

2. a. $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x-1}$;

2. b. $x \longmapsto \dfrac{5}{\mathrm{e}^{5x-3}}$;

2. c. $x \longmapsto \mathrm{e}^{-4x-1}$.

Exercice 11.

Déterminer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$ avec la méthode de votre choix.

1. $f : x \longmapsto f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

2. $g : x \longmapsto g(x) = x^5 + 10x + 3$.

Exercice 12.

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad 1 \leqslant 1 + \dfrac{1}{x} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2$.

2. En déduire un encadrement de $f(x)$.

3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 13. Partie entière

Définition 1 (Partie entière (par défaut))

La **partie entière** (par défaut) d'un nombre réel x est l'unique entier relatif n (positif, négatif ou nul) tel que

$$n \leqslant x < n + 1$$

C'est donc l'entier qui précède x ou le plus grand entier, inférieur ou égal à x.

Notations : E(x) ou $\lfloor x \rfloor$

La partie entière du réel x se note usuellement $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, où la lettre E désigne la fonction partie entière (par défaut). On a :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Exemples

- $E(2,5) = \lfloor 2,5 \rfloor = 2$.
- $E(-2,5) = \lfloor -2,5 \rfloor = -3$.
- $E(0,5) = \lfloor 0,5 \rfloor = 0$.
- $E(-0,5) = \lfloor -0,5 \rfloor = -1$.

1. Pour x réel, comparer les fonctions f et g définie par :

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = E(x)$$

2. En déduire la limite de la fonction g quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.

Quatrième partie

Détermination de limites et croissances comparées

Propriété 2 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) limites usuelles :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\,x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\,x} = 0 \end{cases}$$

- (2) (nombre dérivé en 0) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\,x} - 1}{x} = 1$$

- (3) croissances comparées pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{x^n} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^n \,\mathrm{e}^{\,x} = 0 \end{cases}$$

Exercice 14. Avec les compositions de limites

On ne peut utiliser que les limites du rappel ci-dessus.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\,2x}}{x}$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.

2.

2. a. Vérifier que pour tout réel $x \neq 0$,

$$g(x) = \cdots \frac{\mathrm{e}^{\,2x}}{2x}$$

2. b. En déduire la limite de g en $+\infty$ en utilisant une composition :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \cdots = \cdots \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\,X}}{X} = +\infty \ \text{(croissances comparées)} \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,2x}}{2x} = \cdots \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = \cdots$$

3. Sur le même modèle, déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes définie $\mathbb{R}^*$:

3. a. $f \ : \longmapsto f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\,4x}}{5x}$;

3. b. $g \ : \longmapsto g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\,-5x}}{x}$;

3. c. $h \ : \longmapsto h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\,x^2}}{x}$;

3. d. $k \ : \longmapsto h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\,x^2+1}}{x}$;

Exercice 15. Les croissances comparées

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{\,x} + x - 1 \quad ; \quad g(x) = \mathrm{e}^{\,-x} + x^2 - x \quad ; \quad h(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x} - x^{10}}{\mathrm{e}^{\,x} - x^{100}}$$

Exercice 16. Les croissances comparées

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1 - 3\,\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,2x}}{\mathrm{e}^{\,x} + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x}\,(x - \mathrm{e}^{\,-x})}{1 - x + \mathrm{e}^{\,x}}$$

Exercice 17. Avec un paramètre, discutons !

Soit k un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,-kx}}{k - x}$$

1. Étudier selon les valeurs de k, les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les limites de la fonction f en k^+ et en k^-.

Cinquième partie
Exercices Bilan

Exercice 18. D'après Bac 2020 (c)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1.
   1. a. Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

   1. b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Pour tout réel x, on considère les points M et N de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$.

   2. a. Montrer que le point O est le milieu du segment $[MN]$.

   2. b. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice 19.

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1.

1. a. Étudier les variations de la fonction g.

1. b. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1\ ;\ 0]$.
En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \mathrm{e}^{-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2.

2. a. Démontrer que, pour tout $x > 1$,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

2. b. En déduire que, pour $x > 1$,

$$0 < f(x) < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

2. c. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$$

Vérifier que, pour tout réel x,

$$4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = \frac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\mathrm{e}^{-2x}$$

puis montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = 0.$$

2. d. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right) \mathrm{e}^{-2x+1}$.

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Fin du TD

Sixième partie
Correction

Correction de l'exercice 2 page 1

1. Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $f(x) = \dfrac{6-x}{x-5}$. Limites de f en 5 (à gauche et à droite), en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Limite en 5^-.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5} 6-x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 5\\x<5}} x-5 = 0^- \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{\substack{x\to 5\\x<5}} f(x) = -\infty}$$

$\mathscr{C}_f$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x = 5$.

- Limite en 5^+.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5} 6-x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 5\\x>5}} x-5 = 0^+ \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{\substack{x\to 5\\x>5}} f(x) = +\infty}$$

$\mathscr{C}_f$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x = 5$.

- Limite en $+\infty$. Pour tout réel x différent de 5 on a :

$$f(x) = \frac{6-x}{x-5} = \frac{x\left(\dfrac{6}{x}-1\right)}{x\left(1-\dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\dfrac{6}{x}-1}{1-\dfrac{5}{x}}$$

Or on sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x}$ donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{x} - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{5}{x} = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1}$$

$\mathscr{C}_f$ présente donc un asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $+\infty$.

- Limite en $-\infty$. On obtient de même :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6}{x} - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{5}{x} = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1}$$

$\mathscr{C}_f$ présente donc un asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$.

2. Soit g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{x-1}$. Limites de g en 1, en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Limite en 1^-.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} x-1 = 0^- \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1} x^2 - x = 0 \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} g(x) = -\infty}$$

$\mathscr{C}_g$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x = 1$.

- Limite en 1^+.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} x-1 = 0^+ \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \lim_{\substack{x\to 1\\x>1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

Donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1} x^2 - x = 0 \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = +\infty}$$

$\mathscr{C}_g$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x = 1$.

- Limite en $+\infty$.
  - On a d'une part :

$$\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

  - On a d'une part pour tout réel x :

$$x^2 - x = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

  - Donc pour résumer :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0 \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$$

- Limite en $-\infty$. De même :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0 \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}$$

3. Soit h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $h(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$. Limites de h en 1, en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Limite en 1^-.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} 2x + 1 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-1)^2 = 0^+ \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = +\infty}$$

$\mathscr{C}_h$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x = 1$.

- Limite en 1^+.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} 2x + 1 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1)^2 = 0^+ \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} h(x) = +\infty}$$

$\mathscr{C}_h$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x = 1$.

- Limite en $+\infty$.
  - Pour tout réel x différent de 1 on a :

$$h(x) = \frac{2x+1}{x^2 - x + 1} = \frac{x\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{2 + \dfrac{1}{x}}{x\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}$$

  - On s'occupe du dénominateur : on sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1 \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

– Et pour finir

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0}$$

$\mathscr{C}_h$ présente donc un asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

- Limite en $-\infty$. On obtient de même :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0}$$

$\mathscr{C}_h$ présente donc un asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

4. Soit k définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1~;~2\}$ par $k(x) = \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$. Limites de k en 1, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Remarque : en 2 il y a une forme indéterminée, on verra comment la lever dans l'exercice suivant.

- Limite en 1.
  - **Étude préalable à faire au brouillon (ne pas l'écrire sur sa copie)**
    On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} x - 2 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} k(x) = ? \begin{cases} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{cases}$$

On sait que le quotient va tendre vers l'infini mais il nous faut déterminer si $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^2 - 3x + 2 = \begin{cases} 0^+ \\ \text{ou} \\ 0^- \end{cases}$.

  - **Étude du signe de $x^2 - 3x + 2$.**
    L'expression $\left(x^2 - 3x + 2\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l|} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \Delta = 1 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(x^2 - 3x + 2\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2$$

De ce fait on peut factoriser $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ et étudier son signe (signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines) :

x	$-\infty$		1^- 1 1^+		2		$+\infty$
signe de $x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  - Limite en 1^-.
    Donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} x - 2 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^2 - 3x + 2 = 0^+ \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} k(x) = -\infty}$$

$\mathscr{C}_k$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x = 1$.

  - Limite en 1^+.
    Et :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} x - 2 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} x^2 - 3x + 2 = 0^- \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} k(x) = +\infty}$$

$\mathscr{C}_k$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x = 1$.

- <u>Limite en $+\infty$</u>.
  - Pour tout réel x différent de 1 et 2 on a :

$$k(x)=\frac{x-2}{x^2-3x+1}=\frac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{1-\dfrac{2}{x}}{x\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

  - On s'occupe du dénominateur : on sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}$ donc :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=1\end{cases}\underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$$

  - Et pour finir

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{2}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty\end{cases}\underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow}\boxed{\lim_{x\to+\infty} k(x)=0}$$

  $\mathscr{C}_k$ présente donc un asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.

- <u>Limite en $-\infty$</u>.
  De même :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{2}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty\end{cases}\underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow}\boxed{\lim_{x\to-\infty} k(x)=0}$$

  $\mathscr{C}_k$ présente donc un asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $-\infty$.

Correction de l'exercice 3 page 2

1. Soit f définie sur D_f par $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$.

1. a. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
La fonction f est définie si le dénominateur $P(x)=x^2-3x+2$ est différent de zéro.
L'expression $\left(x^2-3x+\ 2\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l|l}a=1 & \\ b=-3 & \Longrightarrow \Delta=1>0\\ c=2 & \end{array}\right.$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x\longmapsto\left(x^2-3x+\ 2\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{3-\sqrt{1}}{2}=1\quad\text{et}\quad x_2=\frac{3+\sqrt{1}}{2}=2$$

De ce fait : $\boxed{D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\ ;\ 2\}}$.

1. b. Étudier les limites de f en 1 .
Pour tout réel x on a d'après ce qui précède : $P(x)=(x-1)(x-2)$.
De ce fait pour tout réel x de $\mathbb{D}_f$ on a :

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+2}=\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}$$

On a donc

$$\boxed{\lim_{x\to1} f(x)=\frac{1}{1-2}=-1}$$

1. c. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
On va utiliser le fait que pour tout réel de D_f on a :

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

- Limite en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} x-2 = +\infty \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

$\mathscr{C}_f$ présente donc un asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

- Limite en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} x-2 = -\infty \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$$

$\mathscr{C}_f$ présente donc un asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

- Limite en 2^+.

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} x-2 = 0^+ \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = +\infty}$$

$\mathscr{C}_f$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x = 2$.

- Limite en 2^-.

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} x-2 = 0^- \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty}$$

$\mathscr{C}_f$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x = 2$.

2. Soit g définie sur D_g par $g(x) = \dfrac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$.

2. a. Déterminer D_g, l'ensemble de définition de g.
La fonction g est définie si le dénominateur $Q(x) = x^2 - 8x + 15$ est différent de zéro.
L'expression $\left(x^2 \; -8x + \;\; 15\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 15 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \\ \Longrightarrow \Delta = 4 > 0 \\ \\ \end{array}\right.$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(x^2 \; -8x + \;\; 15\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{8-\sqrt{4}}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8+\sqrt{4}}{2} = 5$$

De ce fait : $\boxed{D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\,;\,5\}}$.

2. b. Étudier les limites de g en 3 (à gauche et à droite).

- On a $\lim\limits_{x\to2} x^2 - 7x + 12 = 0$ donc on est en présence d'une forme indéterminée $0/0$.
- On va alors factoriser numérateur et dénominateur.
  D'après ce qui précède on a déjà : $Q(x) = x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$.
- Par ailleurs le numérateur $P(x) = x^2 - 7x + 12$.
  L'expression $\left(x^2 \; -7x + \;\; 12\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -7 \\ c = 12 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \\ \Longrightarrow \Delta = 1 > 0 \\ \\ \end{array}\right.$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(x^2 \; -7x + \;\; 12\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{7-\sqrt{1}}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+\sqrt{1}}{2} = 4$$

Donc $P(x) = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$

- De ce fait pour tout réel x de D_g on a :

$$\boxed{g(x)=\frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-5)}=\frac{x-4}{x-5}}$$

- On en déduit donc facilement :

$$\boxed{\lim_{x\to 3} g(x)=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}}$$

2. c. Étudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
On va utiliser le fait que pour tout réel de D_g on a :

$$g(x)=\frac{x-4}{x-5}$$

- Limite en $+\infty$. Pour tout x de $D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\ ;\ 5\}$ on a :

$$g(x)=\frac{x-4}{x-5}=\frac{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}=\frac{1-\frac{4}{x}}{1-\frac{5}{x}}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{4}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{5}{x}=1\end{cases}\underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow}\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=1}$$

$\mathscr{C}_g$ présente donc un asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $+\infty$.

- Limite en $-\infty$.
  De même :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{4}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{5}{x}=1\end{cases}\underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow}\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x)=1}$$

$\mathscr{C}_g$ présente donc un asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $-\infty$.

- Limite en 5^+. Pour tout x de $D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\ ;\ 5\}$ on a :

$$g(x)=\frac{x-4}{x-5}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 5} x-4=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} x-5=0^+\end{cases}\underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow}\boxed{\lim_{\substack{x\to 5\\ x>5}} g(x)=+\infty}$$

$\mathscr{C}_g$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x=5$.

- Limite en 5^-.
  De même :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 5} x-4=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} x-5=0^-\end{cases}\underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow}\boxed{\lim_{\substack{x\to 5\\ x<5}} g(x)=-\infty}$$

$\mathscr{C}_g$ présente donc un asymptote verticale d'équation $x=5$.

Correction des exercice 9 et 10 page 4

1. On va détailler la recherche de la limite de $x\longmapsto \mathrm{e}^{3x+2}$ en $+\infty$.

1. a. Méthode 1.

1. a. 1. Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a : $\mathrm{e}^{3x+2}>\mathrm{e}^{x}$.
Pour tout réel $x>0$, on a :

$$3x+2>x$$

On compose par la fonction exponentielle qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$e^{3x+2}>\mathrm{e}^{x}$$

1. a. 2. En déduire alors la limite de $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x+2}$ en $+\infty$.
On applique alors le théorème de comparaison :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & e^{3x+2} > \mathrm{e}^{x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty; \end{cases} \underset{\text{par théorème comparaison}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x \to +\infty} e^{3x+2} = +\infty}$$

1. b. Méthode 2 : Utilisez maintenant une fonction composée.

$$x \longmapsto 3x+2$$
$$X \longmapsto \mathrm{e}^{X}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 3x+2 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x \to +\infty} e^{3x+2} = +\infty}$$

2. On peut calculer de la même façon ou en utilisant une composition (c'est plus rapide), la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

2. a. $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x-1}$ **;**

- Méthode 1 : par théorème de comparaison.
  Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :
  $$2x \geqslant x \Longrightarrow 2x - 1 \geqslant x - 1$$
  On compose par la fonction exponentielle qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
  $$e^{2x-1} > \mathrm{e}^{x-1} = e^{-1} \times e^{x}$$
  Or puisque $e^{-1} > 0$ on a ;
  $$\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \underset{\text{par produit avec } e^{-1}>0}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} e^{-1} \times e^{x} = +\infty$$
  On applique alors le théorème de comparaison :
  $$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & e^{2x-1} > e^{-1} \times e^{x} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-1} \times e^{x} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par théorème comparaison}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x \to +\infty} e^{2x-1} = +\infty}$$
- Méthode 2 : Utilisez maintenant les composées de fonctions.
  $$x \longmapsto 2x-1$$
  $$X \longmapsto \mathrm{e}^{X}$$
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 2x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x \to +\infty} e^{2x-1} = +\infty}$$

2. b. $x \longmapsto \dfrac{5}{\mathrm{e}^{5x-3}}$
On peut écrire pour tout réel x que :

$$\frac{5}{\mathrm{e}^{5x-3}} = 5\,\mathrm{e}^{-5x+3}$$

$$x \longmapsto -5x+3$$
$$X \longmapsto \mathrm{e}^{X}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -5x+3 = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-5x+3} = 0$$

Puis par produit par 5 :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} 5\,\mathrm{e}^{-5x+3} = 0}$$

2. c. $x \longmapsto \mathrm{e}^{-4x-1}$ **.**

$$\boxed{\begin{array}{l} x \overset{u}{\longmapsto} -4x-1 \\ \qquad\qquad X \overset{v}{\longmapsto} \mathrm{e}^{X} \end{array}}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -4x-1 = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-4x-1} = 0$$

Correction de l'exercice 18 page 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$.
On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. 1. a. Pour tout x réel,

$$f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x^2+1}=x\,\mathrm{e}^{-x^2}\times\mathrm{e}=\frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}\times\mathrm{e}=\frac{\mathrm{e}}{x}\times\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$$

1. b.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{x}=0$$

- Pour tout réel positif X d'après les croissances comparées,

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{X}}{X}=+\infty$$

donc

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{\mathrm{e}^{X}}=0$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, donc en posant $X=x^2$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}=0$.
Ce que l'on peut résumer ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{\mathrm{e}^{X}}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\end{array}\right.\ \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}=0$$

- Par produit de limites, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

Ce que l'on peut résumer ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}=0\end{array}\right.\ \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{x}\times\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}=0\Longrightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$$

De ce fait $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f présente une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$.

2. Pour tout réel x, on considère les points M et N de la courbe $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives x et $-x$.

2. a. Les coordonnées de M sont $(x\ ;\ f(x))$ et celles de N sont $(-x\ ;\ f(-x))$.

$$f(-x)=-x\,\mathrm{e}^{-(-x)^2+1}=-x\,\mathrm{e}^{-x^2+1}=-f(x)$$

Le milieu de [MN] a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x+(-x)}{2}\ ;\ \frac{f(x)+(-f(x))}{2}\right)=(0\ ;\ 0)$$

C'est donc le point O.

2. b. La courbe $(\mathcal{C})$ est donc symétrique par rapport au point O.

3. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et

$$f'(x)=1\times\mathrm{e}^{-x^2+1}+x\times(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2+1}=\left(1-2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2+1}$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x^2+1}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-2x^2$ qui s'annule et change de signe pour $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$$f(0)=0\quad\text{et}\quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2\,\mathrm{e}}}{2}\approx1,166$$

D'où le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$1-2x^2$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2\,\mathrm{e}}}{2}$	$\searrow$	0