Math93.com

TD 1 - Terminale Spécialité Maths
Intégration

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Première partie
Intégrale d'une fonction continue et positive

Prérequis

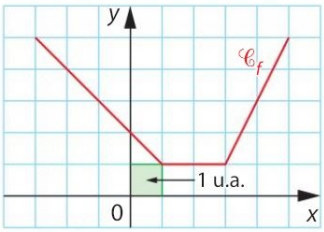
Le **I - Intégrale d'une fonction continue et positive** du cours disponible sur www.math93.com

Exercice 1. Définition en terme d'aire (capacité 1) (c)

1. **Capacité 1** : Lire l'exercice résolu 1 page 331 du livre (capacité 1).
2. Sur le même modèle, faire les exercices suivants :

Exercice 1A

La fonction f est continue sur $[-3\,;5]$.

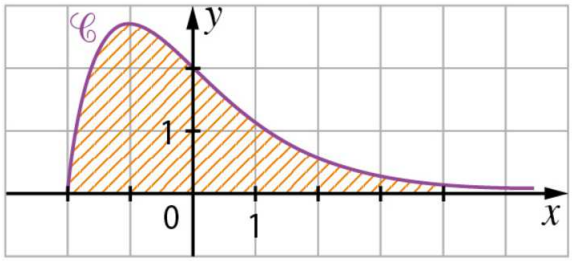


1. Interpréter $\int_a^b f(x)\,dx$ et déterminer sa valeur graphiquement dans chacun des cas suivants.

a. $a=1, b=3$ **b.** $a=-3, b=-1$ **c.** $a=3, b=5$
d. $a=-3, b=3$ **e.** $a=1, b=5$ **f.** $a=0, b=5$

2. Le repère est orthonormé et l'unité graphique est 0,8 cm. Quelle est l'aire, en cm^2, de la portion du plan comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=-3$ et $x=5$?

Exercice 1B



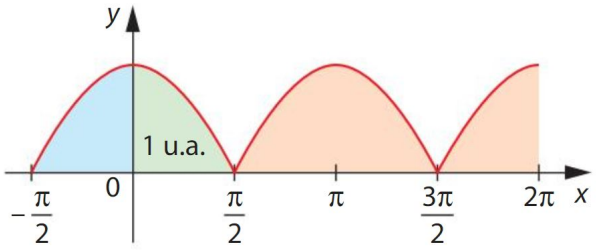
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessus.

1. Donner le signe de f sur $[-2\,;\,4]$.
2. Exprimer l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée à l'aide d'une intégrale notée I.
3. Estimer, à une unité près, la valeur de : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Déterminer un encadrement de I par deux nombres entiers.

Exercice 2. Propriété : avec des fonctions périodiques

On considère la fonction f définie, positive et continue sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période π dont la courbe est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormal. On admet que l'aire de la partie colorée en vert est 1 u.a. Déterminer :

1. $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$;
2. $J=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(u)\,\mathrm{d}u$;
3. $K=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} f(y)\,\mathrm{d}y$.



Réponses

$I = 1$; $J = 2$; $K = 3$

Exercice 3. Propriété : avec des fonctions périodiques (c)

On considère la fonction f définie, positive et continue sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 4. On donne $\int_0^2 f(w)\,\mathrm{d}w = 3$.
Déterminer :

1. $L = \int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$;
2. $M = \int_{-2}^{2} f(u)\,\mathrm{d}u$;
3. $N = \int_{2}^{10} f(y)\,\mathrm{d}y$.

Exercice 4. Encadrer une intégrale par la méthode des rectangles (capacité 2)

Remarque

La **méthode des rectangles** est explicitée dans le TD d'algorithmique disponible sur la page www.math93.com et que vous devrez faire en DM via **repl.it**.
Les algorithmes associés sont a connaître et font parti des ROC d'algorithmiques au même titre que l'**algorithme de seuil** pour les suites, ou ceux de **balayage** et **d'encadrement**.

1. **Capacité 2** : Lire et faire l'exercice résolu 2 page 331.
2. Sur le même modèle faire l'exercice 47 page 342.

Deuxième partie
Théorème fondamental et Calculs d'intégrales

Prérequis

Le **III - Calcul de primitives et d'intégrales** et **IV.1 et 2 - Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque** du cours disponible sur www.math93.com

Exercice 5. Th. Fondamental : Étudier une fonction définie par une intégrale (capacité 3) (c)

Soit F la fonction définie sur $[-2\,;\,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{t+2}\,\mathrm{d}t$$

1. Donner une interprétation graphique de $F(2)$ et $F(3)$ puis conjecturer la comparaison de ces deux nombres.
2. Déterminer la dérivée de F.
3. Étudier les variations de F sur $[-2\,;\,+\infty[$.

Exercice 6. Calculer une intégrale (capacité 4) (c)

▷ **Capacité 4**.

1. Calculer les intégrales suivantes :

1. a. $I = \displaystyle\int_{-1}^{4} \left(3x^2 + 4x + 1\right) \mathrm{d}x$.

1. b. $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{\,3t+1} \,\mathrm{d}t$.

1. c. $K = \displaystyle\int_{0}^{\pi} 3\sin(2x) \,\mathrm{d}x$.

2. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln sur cet intervalle.

3. Calculer $L = \displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \ln(x) \,\mathrm{d}x$.

Exercice 7. Calculer une intégrale (c)

Calculer les intégrales suivantes et vérifier vos résultats avec la calculatrice :

1. $A = \displaystyle\int_{0}^{1} \left(x - x^3\right) \mathrm{d}x$

2. $B = \displaystyle\int_{-1}^{4} (x+1)^4 \,\mathrm{d}x$

3. $C = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$

4. $D = \displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}\right)^2 \mathrm{d}x$

5. $E = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) \,\mathrm{d}x$

Exercice 8. Calculer une intégrale

Calculer les intégrales suivantes et vérifier vos résultats avec la calculatrice :

1. $A = \displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \left(\frac{\ln x}{x}\right) \mathrm{d}x$

2. $B = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x \, \sin^2 x\right) \mathrm{d}x$

3.

3. a. Démontrer la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \cos^3 x = \cos x - \cos x \sin^2 x$$

3. b. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$C = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3 x\right) \mathrm{d}x$$

Réponses

$A = \frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{3}$; $C = \frac{2}{3}$

Troisième partie

Propriétés de l'intégrale

Prérequis

Le **IV. 2 et IV. 3 - Propriétés de l'intégrale** du cours disponible sur www.math93.com

Exercice 9. Linéarité de l'intégrale (c)

Théorème 1

Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I et k et k' deux réels quelconques.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

et ce que l'on nomme linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b \left(kf(x)+k'g(x)\right)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k'\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Calculer le réel A défini par :

$$A = 3\int_0^{\pi} \cos^2 x\ \mathrm{d}x - \int_{\pi}^0 3\sin^2 x\ \mathrm{d}x$$

Exercice 10. Propriétés de l'intégrale (c)

Calculer les intégrales :

1. $A = \displaystyle\int_{-100}^{100} \left(x^3 + 4x^7\right)\mathrm{d}x$

2. $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \int_k^{k+1} \left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

Exercice 11. Avec une valeur absolue (c)

On cherche à calculer la valeur de l'intégrale

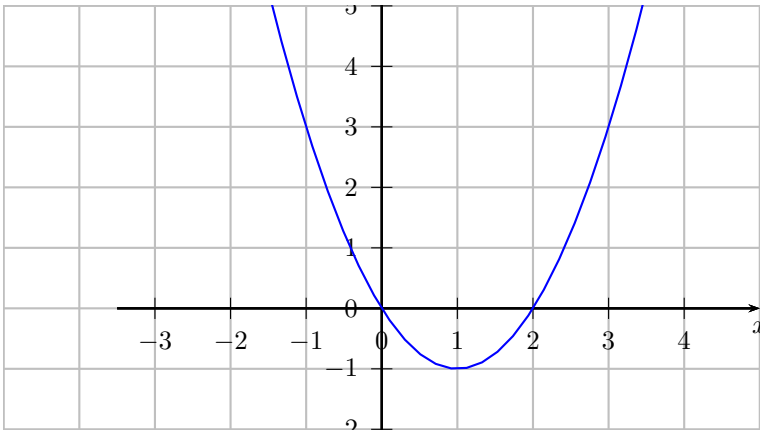
$$A = \int_0^3 \left|t^2 - 2t\right|\mathrm{d}t$$

1. Étudier le signe de $t \longmapsto t^2 - 2t$ sur $\mathbb{R}$.

2. Exprimer $\left|t^2 - 2t\right|$ sans la valeur absolue, en fonction des valeurs de x

3. On donne la courbe représentative de $t \longmapsto t^2 - 2t$ sur $\mathbb{R}$. En déduire celle de $t \longmapsto \left|t^2 - 2t\right|$ sur $\mathbb{R}$.

4. Calculer A.



Exercice 12. Majorer ou minorer (capacité 5) (c)

1. Démontrer que, pour tout réel c de $[0\,;\,1)$ on a :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}^{x}$$

2. En déduire un encadrement de $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Quatrième partie

Intégration par parties

Théorème 2 (Intégration par parties)

Soit u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
On dit dans ce cas que les fonction $\boldsymbol{u}$ **et** $\boldsymbol{v}$ **sont « de classe** $\boldsymbol{C^1}$ **sur** $\boldsymbol{[a\,;\,b]}$ **».**
On a alors :

$$\boxed{\int_a^b u'v = \big[\ uv\ \big]_a^b - \int_a^b uv'}$$

Méthode

La méthode dans ce genre d'exercice est de bien identifier les fonction u et v. Généralement, l'une des 2 admet une primitive simple, on prendra u', et l'autre a une dérivée plus simple, on posera v.
L'exemple type est I_3 avec $x \longmapsto \ln x$ que l'on écrit sous la forme $x \longmapsto 1 \times \ln x$.
On pose :

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Exercice 13. Intégration par parties (capacité 6)

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x\,\mathrm{d}x$.

2. $J = \displaystyle\int_0^{\ln 2} (x-1)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 14. Intégration par parties

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. a. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$

1. b. $I_3 = \displaystyle\int_2^4 \ln x\,\mathrm{d}x$

1. c. $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^0 (3t+1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

2. A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer les intégrales suivantes :

2. a. $J_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln^2 x\,\mathrm{d}x$

2. b. $J_2 = \displaystyle\int_{\ln 2}^1 (x^2-1)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}t$

Cinquième partie

Application du calcul intégral : calcul d'aire et valeur moyenne

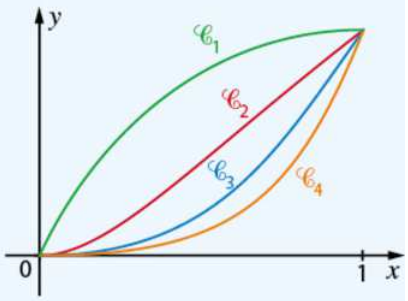
Prérequis

Le **V - Calculer une aire** et **VI - Valeur moyenne** du cours disponible sur www.math93.com

Exercice 15. Étudier une suite d'intégrales (capacité 7) (c)

Étudier une suite d'intégrales

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ où $f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x de $[0\,;1]$.
On note $\mathscr{C}_n$ les courbes représentatives des fonctions f_n dans le plan. On a tracé ci-contre $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$.



1. Émettre une conjecture sur le sens de variation de (I_n) et la démontrer.
2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de (I_n).

Exercice 16. Aire entre deux courbes (capacité 8) (c)

Soit f et g les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ dont les courbes représentatives dans un repère orthonormé sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Préciser la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[0\,;1]$, puis calculer l'aire, en u.a., de la surface délimitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 17. Valeur moyenne (capacité 9) (c)

Lors d'une épidémie de grippe, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas, est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par $f(t) = 6t^2 - t^3$.

1. Calculer la valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;6]$.
2. Donner une interprétation de ce résultat.

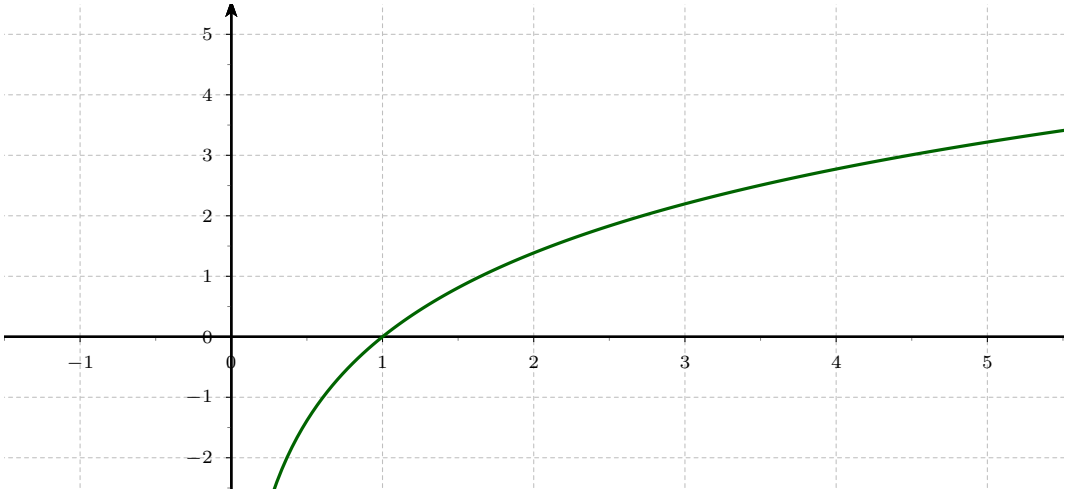
Sixième partie

Approfondissement

Exercice 18. Un encadrement (c)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2\ln x$$



1. On donne la courbe de f sur le graphique ci-dessus.
Hachurer sur le graphique l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \text{e}$.

2. Donner un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire hachurée.

3. Montrer qu'une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est :

$$F(x) = 2x\ln x - 2x$$

4. Montrer que l'intégrale sur $[1\,;\,\text{e}]$ de f est :

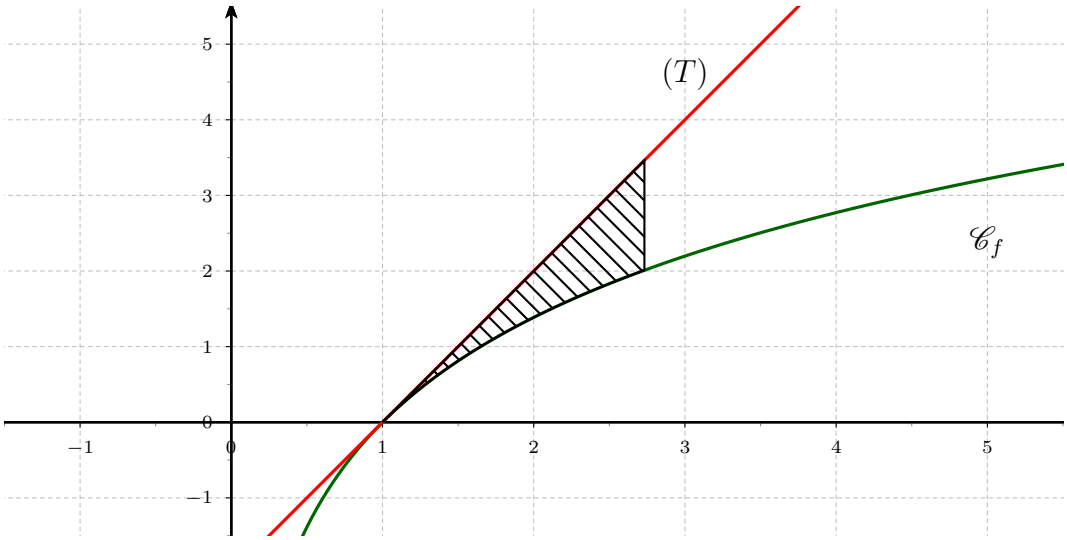
$$\int_1^{\text{e}} 2\ln x\,\mathrm{d}x = 2$$

5. On a tracé ci-dessous (T), la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. a. Montrer que la tangente (T) est d'équation $y = 2x - 2$.

5. b. Montrer que (T) est située au dessus de $\mathscr{C}_f$.

5. c. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.



Exercice 19. Avec des suites (c)

On donne pour tout entier naturel n non nul :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\,nx}}{\mathrm{e}^{\,x}+1}\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0.

2. Pour tout entier naturel n, calculer $I_{n+1} + I_n$.

3. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

4. Prouver que pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ on a :

$$\frac{\mathrm{e}^{\,nx}}{\mathrm{e}+1} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\,nx}}{\mathrm{e}^{\,x}+1} \leqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\,nx}$$

5. En déduire que pour tout n entier, $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}}\,\frac{\mathrm{e}^{\,n}-1}{n} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{\,n}-1}{n}$$

6. Montrer alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$$

7. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\mathrm{e}^{\,n}} = 0$$

Exercice 20. Avec des suites - D'après Bac S, Polynésie 19 juin 2019 - exercice 3 (c)

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}\,x$ et pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}\,x$.

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

2. a. Calculer $I_0 - I_1$.

2. b. En déduire I_1.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.

3. b. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n.

4. Soit n un entier naturel non nul.

On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

4. b. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$.

5. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.

5. b. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com. C'est l'exercice 3 du sujet.

Exercice 21. Avec des suites - D'après Bac S, centres étrangers 2019 - exercice 2 (c)

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

Pour N allant de 1 à 12
$U \leftarrow$
Fin Pour

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.
   Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
$-0,2$	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3 295
$-6\,634$	29 654
$-66\,341$	296 539
$-729\,752$	3 261 928
$-8\,757\,025$	39 143 135
$-113\,841\,326$	508 860 754

   Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$? Et si $u_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $F(x) = (-1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle [0 ; 1] de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.
2. En déduire que $I_1 = \mathrm{e} - 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

   Utiliser cette formule pour calculer I_2.

4. **4. a.** Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\mathrm{e}$.

4. b. Justifier que : $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

4. c. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

4. d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n\,!$ le nombre défini, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par :

$$\begin{cases} 1! = 1 \\ 2! = 2 \times 1 \\ \text{et si } n \geqslant 3 : n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1 \end{cases}$$

On a ainsi par exemple
$3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \times 2\,!$
$4\,! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \times 3\,!$
$8\,! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 8 \times 7\,!$
Et, plus généralement :

$$(n+1)\,! = (n+1) \times n\,!$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n\,!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n.$$

On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{et } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2. On admet que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,! = +\infty$.

2. a. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,7$.

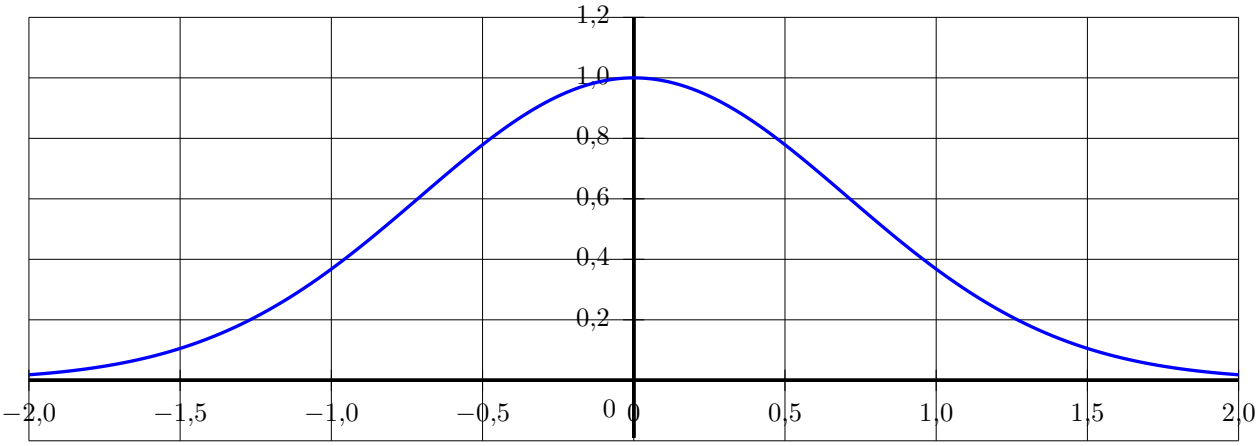
2. b. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,8$.

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com. C'est l'exercice 2 du sujet.

Exercice 22. DM (Devoir Maison à rendre)
Une fonction qui n'admet pas de primitive explicite (c)

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthogonal d'une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$. La courbe $\mathcal{C}_g$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et se situe dans le demi-plan $y > 0$.



Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$G(t) = \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Partie A

Les justifications des réponses aux questions suivantes pourront s'appuyer sur des considérations graphiques.

1. La fonction G est-elle croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$? Justifier.
2. Justifier graphiquement l'inégalité $G(1) \leqslant 0,9$.
3. La fonction G est-elle positive sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Dans la suite du problème, la fonction $g$est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$.

Partie B

1. Étude de g

   1. a. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

   1. b. Calculer la fonction dérivée de g et en déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

   1. c. Préciser le maximum de g sur $\mathbb{R}$. En déduire que $g(1) \leqslant 1$.

2. On note E l'ensemble des points M situés entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On appelle I l'aire de cet ensemble.

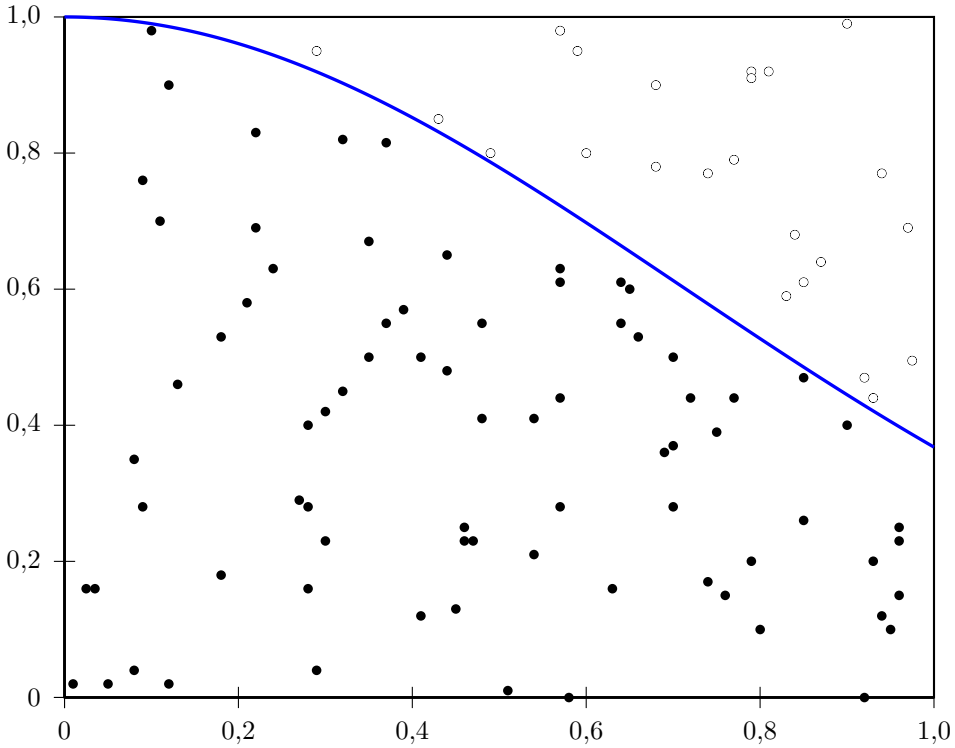
   On rappelle que :

   $$I = G(1) = \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u.$$

   On souhaite estimer l'aire I par la méthode dite « de Monte-Carlo » décrite ci-dessous.

   - On choisit un point $M(x\ ;\ y)$ en tirant au hasard de façon indépendante ses coordonnées x et y selon la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On admet que la probabilité que le point M appartienne à l'ensemble E est égale à I.
   - On répète n fois l'expérience du choix d'un point M au hasard. On compte le nombre c de points appartenant à l'ensemble E parmi les n points obtenus.
   - La fréquence $f = \dfrac{c}{n}$ est une estimation de la valeur de I.

2. a. La figure ci-dessous illustre la méthode présentée pour $n = 100$. Déterminer la valeur de f correspondant à ce graphique.



2. b. L'exécution de l'algorithme ci-dessous utilise la méthode de Monte-Carlo décrite précédemment pour déterminer une valeur du nombre f.

Recopier et compléter cet algorithme.

f, x et y sont des nombres réels, n, c et i sont des entiers naturels.

ALEA est une fonction qui génère aléatoirement un nombre compris entre 0 et 1.

```
c ← 0
Pour i variant de 1 à n faire :
                x ← ALEA
                y ← ALEA
        Si y ⩽ ... alors
                c ← ...
        fin Si
fin Pour
                        f ← ...
```

2. c. Une exécution de l'algorithme pour $n = 1\,000$ donne $f = 0,757$.

2. c. 1. Vérifier-le en le programmant sous Python.

2. c. 2. Que donne l'algorithme pour d'autres valeurs de n ?

2. c. 3. ***Bonus*** *: avec matplotlib, essayer d'obtenir le graphique proposé.*

Partie C

On rappelle que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = \mathrm{e}^{-u^2}$ et que la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(t) = \int_0^t g(u)\,\mathrm{d}u.$$

On se propose de déterminer une majoration de $G(t)$ pour $t \geqslant 1$.

1. Un résultat préliminaire.

On admet que, pour tout réel $u \geqslant 1$, on a $g(u) \leqslant \dfrac{1}{u^2}$.

En déduire que, pour tout réel $t \geqslant 1$, on a :

$$\int_1^t g(u)\,\mathrm{d}u \leqslant 1 - \frac{1}{t}.$$

2. Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 1$,

$$G(t) \leqslant 2 - \frac{1}{t}.$$

Que peut-on dire de la limite éventuelle de $G(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 23. Aire entre deux courbes

Soit f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x$ et $g(x) = -x^2 + 5$. Déterminer (en u.a.) l'aire de la partie comprise entre les deux courbes représentatives de f et g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.

Septième partie

Quelques compléments

Exercice 24. Longueur d'un arc (c)

Longueur d'un arc

Soit f une fonction dérivable et de dérivée continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
On dit dans ce cas que la fonction **f est « de classe C^1 sur $[a\,;\,b]$ »** ou que **$f \in C^1([a\,;\,b])$**.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.
Soit $A\,(a\,;\ f(a))$ et $B\,(b\,;\ f(b))$ deux points de la courbes $\mathscr{C}_f$.

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est donné par la formule :

$$\boxed{\overset{\frown}{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\ \mathrm{d}t}$$

On pose :

$$f(x) = \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3}$$

Déterminer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, avec A et B deux points de la courbe d'abscisse $a = 2$ et $b = 3$.

Exercice 25. Intégration par parties : du classique

Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
On dit dans ce cas que les fonction **u et v sont « de classe C^1 sur $[a\,;\,b]$ »**.
On a alors :

$$\boxed{\int_a^b u'v = \left[\ uv\ \right]_a^b - \int_a^b uv'}$$

Soit K l'intégrale :

$$K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{e}^{\,2x}\ \sin x\ \mathrm{d}x$$

1. A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$K = \mathrm{e}^{\,2\pi} - 2\,\mathrm{e}^{\,\pi} - 4K$$

2. En déduire que la valeur de K.

Huitième partie
Correction

Correction de l'exercice 1

- Correction de l'exercice 1A.

  1.

  1. a. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [1 ; 3]. Elle est égale à 2 u.a.

  1. b. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [- 3 ; - 1]. Elle est égale à 8 u.a.

  1. c. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [3 ; 5]. Elle est égale à 6 u.a.

  1. d. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [- 3 ; 3]. Elle est égale à 12 + 2 = 14 u.a.

  1. e. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [1 ; 5]. Elle est égale à 2 + 6 = 8 u.a.

  1. f. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [0 ; 5]. Elle est égale à 1,5 + 2 + 6 = 9,5 u.a.

  2. L'aire située sous la courbe sur l'intervalle [- 3 ; 5] s'obtient en ajoutant les résultats obtenus en 1.c. et 1.d., ce qui donne 20 u.a., comme l'unité d'aire est de 0,64 cm^2, l'aire en cm^2 est égale à 12,8 cm^2.

- Correction de l'exercice 1B.

  1. Donner le signe de f sur $[-2\ ;\ 4]$.
  La fonction f est positive sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

  2. Exprimer l'aire, en unités d'aire, de la surface hachurée à l'aide d'une intégrale notée I.

  $$I = \int_{-2}^{4} f(t)\ \mathrm{d}t$$

  3. Estimer, à une unité près, la valeur de : $\int_{0}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t$.

  $$\int_{0}^{1} f(t)\ \mathrm{d}t \approx 2$$

  4. Déterminer un encadrement de I par deux nombres entiers.

  $$3 < I < 11$$

Correction de l'exercice 3

On considère la fonction f définie, positive et continue sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 4. On donne $\int_{0}^{2} f(w)\ \mathrm{d}w = 3$.

1. Puisque la fonction f est paire on a par symétrie de la courbe Cc_f :

$$I = \int_{-2}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{0}^{2} f(t)\ \mathrm{d}t = 3$$

2. Puisque la fonction f est paire on a par symétrie de la courbe Cc_f :

$$J = \int_{-2}^{2} f(u)\ \mathrm{d}u = 2 \times \int_{0}^{2} f(t)\ \mathrm{d}t = 6$$

3. D'après la relation de Chasles :

$$K = \int_{2}^{10} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_{2}^{6} f(y)\ \mathrm{d}y + \int_{6}^{10} f(y)\ \mathrm{d}y$$

Puisque la fonction f est périodique de période 4 et d'après la question précédente :

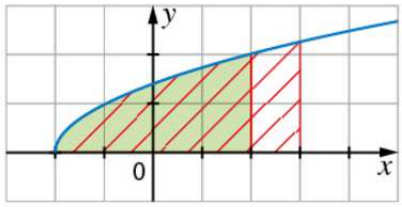
$$\int_{6}^{10} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_{2}^{6} f(y)\ \mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} f(y)\ \mathrm{d}y = 6$$

De ce fait :

$$K = \int_{2}^{10} f(y)\ \mathrm{d}y = 2 \times \int_{-2}^{2} f(y)\ \mathrm{d}y = 12$$

Correction de l'exercice 5 page 2

Soit F la fonction définie sur $[-2\ ;\ +\infty[$ par : $F(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{t+2}\,\mathrm{d}t$.



1 La fonction $f : t \mapsto \sqrt{t+2}$ est continue et positive sur $[-2\ ;+\infty[$ donc $F(2)$ est l'aire, en u.a., de la surface colorée en vert délimitée par la courbe $\mathscr{C}$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=2$.
De même, $F(3)$ est l'aire, en u.a., de la surface hachurée en rouge délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=3$. On conjecture que $F(2) \leqslant F(3)$.

2 La fonction f est continue et positive sur $[-2\ ;+\infty[$ donc d'après le théorème fondamental, F est dérivable sur $[-2\ ;+\infty[$ et $F'(x)=f(x)$.

3 Pour tout réel x de $[-2\ ;+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$ donc $F'(x) \geqslant 0$. La fonction F est donc croissante sur $[-2\ ;+\infty[$. Puisque $2 < 3$ et que F est croissante sur $[-2\ ;+\infty[$ alors $F(2) \leqslant F(3)$. La conjecture est ainsi validée.

Correction de l'exercice 6 page 3

1 **a.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+4x+1$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=x^3+2x^2+x$.
$I=\int_{-1}^{4}(3x^2+4x+1)\mathrm{d}x=\left[F(x)\right]_{-1}^{4}=F(4)-F(-1)$.
Or, $F(4)=64+32+4=100$ et $F(-1)=-1+2-1=0$. Donc $I=100-0=100$.
b. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\ (x)=\mathrm{e}^{3x+1}$.
Pour tout réel x, $g\ (x)=\frac{1}{3}\times 3\mathrm{e}^{3x+1}$. La fonction g est donc de la forme $ku'\mathrm{e}^{u}$ avec $u(x)=3x+1$ et $u'(x)=3$. Or, $u'\mathrm{e}^{u}$ a pour primitive e^{u}.
La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G\ (x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+1}$ est donc une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $J=\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{3x+1}\mathrm{d}x=\left[G(x)\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}\mathrm{e}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2}$.
c. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h\ (x)=3\sin(2x)$.
Pour tout réel x, $h\ (x)=\frac{3}{2}\times 2\sin(2x)$. La fonction h est donc de la forme $k\ u'\sin(u)$ avec $u(x)=2x$ et $u'(x)=2$. Or, $u'\sin(u)$ a pour primitive $-\cos(u)$.
La fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H\ (x)=-\frac{3}{2}\cos(2x)$ est donc une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $K=\int_{0}^{\pi}3\sin(2x)\mathrm{d}x=\left[H(x)\right]_{0}^{\pi}=-\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=0$.

2 **a.** La fonction F est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.
Pour tout réel x strictement positif, $F'(x)=\ln(x)+x\times\frac{1}{x}-1=\ln(x)+1-1=\ln(x)$.
Donc F est une primitive de la fonction ln sur $]0\ ;+\infty[$.
b. $L=\int_{1}^{\mathrm{e}}\ln(x)\mathrm{d}x=\left[x\ln(x)-x\right]_{1}^{\mathrm{e}}=\mathrm{e}\ln(\mathrm{e})-\mathrm{e}-(1\ln(1)-1)=\mathrm{e}-\mathrm{e}+1=1$.

Correction de l'exercice 12 page 5

1 La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout réel x de $[0\,;1]$, $e^{x^2} \geqslant 0$.
Pour tout réel x de $[0\,;1]$, $x^2 \leqslant x$ donc, puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $e^{x^2} \leqslant e^x$.
Finalement, pour tout réel x de $[0\,;1]$, $0 \leqslant e^{x^2} \leqslant e^x$.

2 D'après la propriété de positivité, on a : $\int_0^1 e^{x^2}\,dx \geqslant 0$.
D'après la propriété de comparaison appliquée à l'inégalité $e^{x^2} \leqslant e^x$, on obtient :
$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 e^x\,dx$.
Or, $\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.
On a donc : $0 \leqslant \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leqslant e - 1$.

Correction de l'exercice 7

1. $A = \displaystyle\int_0^1 \left(x - x^3\right) \mathrm{d}x$

$$A = \left[\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\ \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

2. $B = \displaystyle\int_{-1}^4 (x+1)^4 \,\mathrm{d}x$

$$B = \left[\ \frac{1}{5}(x+1)^5\ \right]_{-1}^4 = 5^4 = 625$$

3. $C = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$

$$C = \left[\ \left(\frac{-1}{x}\right)\ \right]_{-2}^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4. $D = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}\right)^2 \mathrm{d}x$
Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}\right)^2 &= \left(\mathrm{e}^{\,x}\right)^2 + 2\,\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{e}^{\,-x} + \left(\mathrm{e}^{\,-x}\right)^2 \\ &= \mathrm{e}^{\,2x} + 2 + \mathrm{e}^{\,-2x}\end{aligned}$$

Donc

$$D = \left[\ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\,2x} + 2x - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\,-2x}\ \right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$$

5. $E = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)\,\mathrm{d}x$

$$E = \left[\ (-\cos x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0 = 1$$

Correction de l'exercice 9

$$A = 3\int_0^{\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{0} 3\sin^2 x \,\mathrm{d}x$$
$$A = 3\int_0^{\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x - 3\int_{\pi}^{0} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$$
$$A = 3\left(\int_0^{\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{0} \sin^2 x \,\mathrm{d}x\right)$$
$$A = 3\left(\int_0^{\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x\right)$$
$$A = 3\left(\int_0^{\pi} \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1} \,\mathrm{d}x\right)$$
$$A = 3\int_0^{\pi} 1 \,\mathrm{d}x$$
$$A = 3\big[\ x\ \big]_0^{\pi} = 3\pi$$

$$\boxed{A = 3\pi}$$

Correction de l'exercice 10

1. $\boldsymbol{A = \displaystyle\int_{-100}^{100} \left(x^3 + 4x^7\right) \mathrm{d}x}$
   - La fonction $x \longmapsto x^3 + 4x^7$ est continue sur $\mathbb{R}$, impaire, et les bornes de l'intégrale sont des réels opposés, donc $\underline{A = 0}$.
2. $\boldsymbol{B = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \int_{k}^{k+1} \left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x}$
   - La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc B existe bien et d'après la relation de Chasles on peut écrire :
   $$B = \sum_{k=0}^{5} \int_{k}^{k+1} \left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x + \int_2^3 \left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x + \cdots + \int_5^6 \left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^6 \left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$$
   - Par ailleurs la fonction $x \longmapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ donc :
   $$\boxed{B = \left[\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ \right]_0^6 = 4\sqrt{6}}$$

Correction de l'exercice 11

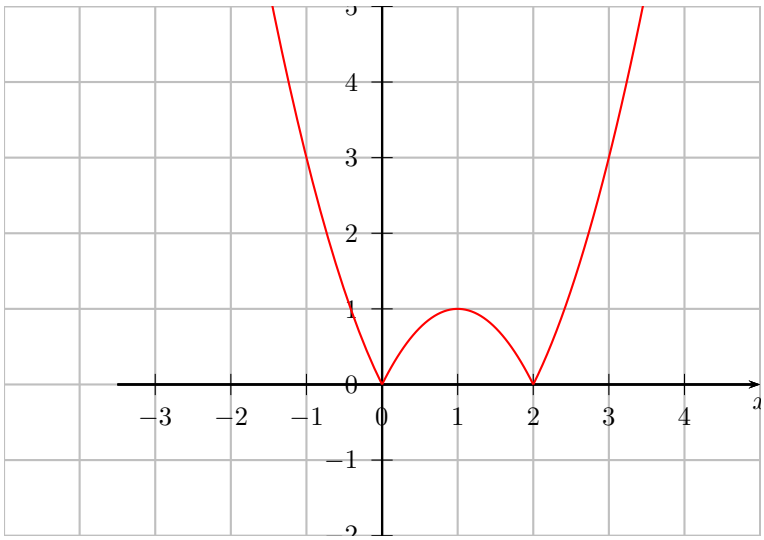
1. **Étudier le signe de $\boldsymbol{t \longmapsto t^2 - 2t}$ sur $\mathbb{R}$.**
   La fonction $t \longmapsto t^2 - 2t$ est continue sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction polynôme du second degré, de racines évidentes 0 et 2. On a donc l'expression du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines soit :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de $t^2 - 2t$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. **Exprimer $\boldsymbol{\left|t^2 - 2t\right|}$ sans les valeurs absolue, en fonction des valeurs de $\boldsymbol{x}$.**
   Par définition de la valeur absolue on a :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de t^2-2t		$+$	0	$-$	0	$+$	
expression de $\lvert t^2-2t\rvert$		t^2-2t	0	$-t^2+2t$	0	t^2-2t	

3. On donne la courbe représentative de $t \longmapsto t^2-2t$ sur $\mathbb{R}$. En déduire celle de $t \longmapsto \lvert t^2-2t\rvert$ sur $\mathbb{R}$.



4. Calculer A.
D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} A = \int_0^3 \lvert t^2-2t\rvert \,\mathrm{d}t &= \int_0^2 \lvert t^2-2t\rvert \,\mathrm{d}t + \int_2^3 \lvert t^2-2t\rvert \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 \left(-t^2+2t\right) \mathrm{d}t + \int_2^3 \left(t^2-2t\right) \mathrm{d}t \\ &= \Big[-\frac{t^3}{3}+t^2 \Big]_0^2 + \Big[\frac{t^3}{3}-t^2 \Big]_2^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{8}{3}}$$

Correction de l'exercice 13 : IPP

Solution commentée

1 $\int_1^e x\ln(x)\,dx$ est de la forme $\int_1^e u(x)v'(x)\,dx$, avec :

$u(x)=\ln(x)$, $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=x$, $v(x)=\frac{x}{2}$.

En effet, si on choisit v' telle que $v'(x)=\ln(x)$ alors on ne sait pas trouver simplement une primitive de la fonction v'.

Les fonctions u et v sont dérivables sur [1 ; e] et les fonctions u' et v' sont continues sur [1 ; e].

On a : $I=\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Or, $u'(x)v(x)=\frac{1}{x}\times\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$.

Donc $I=\left[\frac{x}{2}\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$

$=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$.

2 $\int_0^{\ln(2)}(x-1)e^x\,dx$ est de la forme $\int_0^{\ln(2)}u(x)v'(x)\,dx$ avec :

$u(x)=x-1$, $u'(x)=1$ et $v'(x)=e^x$, $v(x)=e^x$.

En effet, le choix de u et v' telles que $u(x)=x-1$ et $v'(x)=e^x$ permet d'obtenir $u'(x)v(x)=e^x$ et on connaît une primitive de la fonction $u'v$, c'est la fonction $x\mapsto e^x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur [1 ; ln(2)] et les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle [1 ; ln(2)].

On a donc : $J=\left[(x-1)e^x\right]_0^{\ln(2)}-\int_0^{\ln(2)}e^x\,dx=\left[(x-1)e^x\right]_0^{\ln(2)}-\left[e^x\right]_0^{\ln(2)}$.

Donc $J=2(\ln(2)-1)-(2-1)=-2+2\ln(2)$.

Correction de l'exercice 14 : IPP (page 5)

Théorème 3 (Intégration par parties)

Soit u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
On dit dans ce cas que les fonction $\boldsymbol{u}$ **et** $\boldsymbol{v}$ **sont « de classe** $\boldsymbol{C^1}$ **sur** $\boldsymbol{[a\,;\,b]}$ **».**
On a alors :

$$\boxed{\int_a^b u'v = \Big[\ uv\ \Big]_a^b - \int_a^b uv'}$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. a. $\boldsymbol{I_2 = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}t}$

On pose : $\begin{array}{|c|c|}\hline u'(x) = \mathrm{e}^{\,x} & u(x) = \mathrm{e}^{\,x} \\ \hline v(x) = x & v'(x) = 1 \\ \hline \end{array}$ les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc :

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ uv\ \Big]_0^1 - \int_0^1 uv' \\ &= \Big[\ x\,\mathrm{e}^{\,x}\ \Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{\,x} \\ &= \Big[\ x\,\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,x}\ \Big]_0^1 \\ I_2 &= 1 \end{aligned}$$

1. b. $I_3 = \displaystyle\int_2^4 \ln x\,\mathrm{d}x$

On pose : $\begin{array}{|c|c|}\hline u'(x) = 1 & u(x) = x \\ \hline v(x) = \ln x & v'(x) = 1/x \\ \hline \end{array}$ les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[2,4]$ donc :

$$\begin{aligned} I_3 = \int_2^4 \ln x\,\mathrm{d}x &= \Big[\ uv\ \Big]_2^4 - \int_2^4 uv' \\ &= \Big[\ x\ln x\ \Big]_2^4 - \int_2^4 x \times \frac{1}{x} \\ &= \Big[\ x\ln x - x\ \Big]_2^4 \\ I_3 &= 4\ln 4 - 4 - (2\ln 2 - 2) \\ I_3 &= 8\ln 2 - 4 - 2\ln 2 + 2 \\ I_3 &= \underline{6\ln 2 - 2} \end{aligned}$$

1. c. $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^0 (3x+1)\,\mathrm{e}^{\,-x}\,\mathrm{d}x$

On pose : $\begin{array}{|c|c|}\hline u'(x) = \mathrm{e}^{\,-x} & u(x) = -\,\mathrm{e}^{\,-x} \\ \hline v(x) = 3x+1 & v'(x) = 3 \\ \hline \end{array}$ les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[2,4]$ donc :

$$\begin{aligned} I_3 = \int_{-1}^0 (3x+1)\,\mathrm{e}^{\,-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ uv\ \Big]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 uv' \\ &= \Big[\ (-3x-1)\,\mathrm{e}^{\,-x}\ \Big]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (-3)\,\mathrm{e}^{\,-x} \\ &= \Big[\ (-3x-1)\,\mathrm{e}^{\,-x} - 3\,\mathrm{e}^{\,-x}\ \Big]_{-1}^0 \\ &= (-1)\,\mathrm{e}^{\,0} - 3\,\mathrm{e}^{\,0} - \Big((2)\,\mathrm{e}^{\,1} - 3\,\mathrm{e}^{\,1}\Big) \\ &= \underline{-4 + \mathrm{e}} \end{aligned}$$

2. A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer les intégrales suivantes :

2. a. $J_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x$

On pose :

$u'(x) = x^2$	$u(x) = \dfrac{x^3}{3}$
$v(x) = \ln^2 x$	$v'(x) = 2\ln x \times \dfrac{1}{x}$

les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1,\, \mathrm{e}\,]$ donc :

$$\begin{aligned} J_1 = \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x &= \left[\ uv\ \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} uv' \\ &= \left[\ \frac{x^3}{3} \times \ln^2 x\ \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3} \times 2\ln x \times \frac{1}{x}\ dx \\ J_1 &= \left[\ \frac{x^3}{3} \times \ln^2 x\ \right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{2}{3}\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\ dx \end{aligned}$$

On pose :

$u'(x) = x^2$	$u(x) = \dfrac{x^3}{3}$
$v(x) = \ln x$	$v'(x) = \dfrac{1}{x}$

les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1,\, \mathrm{e}\,]$ donc :

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x &= \left[\ uv\ \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} uv' \\ &= \left[\ \frac{x^3}{3} \times \ln x\ \right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{3}\ dx \\ &= \left[\ \frac{x^3}{3} \times \ln x - \frac{x^3}{9}\ \right]_1^{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Donc

$$J_1 = \left[\ \frac{x^3}{3} \times \ln^2 x - \frac{2}{3} \times \left(\frac{x^3}{3} \times \ln x - \frac{x^3}{9}\right)\ \right]_1^{\mathrm{e}}$$

Et

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\mathrm{e}^3}{3} \times \ln^2 \mathrm{e} - \frac{2}{3} \times \left(\frac{\mathrm{e}^3}{3} \times \ln \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}^3}{9}\right) - \left(\frac{1}{3} \times \ln^2 1 - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3} \times \ln 1 - \frac{1}{9}\right)\right) \\ J_1 &= \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{2\,\mathrm{e}^3}{9} + \frac{2\,\mathrm{e}^3}{27} - \frac{2}{27} \\ J_1 &= \frac{9\,\mathrm{e}^3 - 6\,\mathrm{e}^3 + 2\,\mathrm{e}^3 - 2}{27} \\ J_1 &= \boxed{\frac{5\,\mathrm{e}^3 - 2}{27}} \end{aligned}$$

2. b. $J_2 = \displaystyle\int_{\ln 2}^{1} (x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}t$

Correction de l'exercice 15 : Étudier une suite d'intégrales

1 **a.** Graphiquement, I_n représente l'aire, en u.a., de la surface $\mathcal{S}_n$ délimitée par la courbe $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Pour n entier naturel non nul, $\mathcal{C}_{n+1}$ est au-dessous de $\mathcal{C}_n$ donc l'aire de $\mathcal{S}_{n+1}$ est inférieure à l'aire de $\mathcal{S}_n$. On conjecture que la suite (I_n) est décroissante.
b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x de [0 ; 1], $x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1)$. Or, $x^n \geqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$.
Donc $x^n \geqslant x^{n+1}$. De plus, $e^{-x} > 0$. On a donc $x^n e^{-x} \geqslant x^{n+1} e^{-x}$ et d'après la propriété de comparaison : $\int_0^1 f_n(x)dx \geqslant \int_0^1 f_{n+1}(x)dx$ c'est-à dire, $I_n \geqslant I_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (I_n) est décroissante.

2 Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et pour x dans [0 ; 1], $x^n \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $x^n e^{-x} \geqslant 0$. Ainsi, $I_n \geqslant 0$.
De plus, $e^{-x} \leqslant 1$ donc $x^n e^{-x} \leqslant x^n$, donc $\int_0^1 f_n(x)dx \leqslant \int_0^1 x^n dx$.
Or, $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Donc, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Correction de l'exercice 16 : Aire entre deux courbes

Pour tout réel x de [0 ; 1], on a : $x^3 \leqslant x^2$. Donc $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$ sur [0 ; 1].
L'aire est égale, en u.a., à $\int_0^1 (x - x^3)dx$.
Or, $\int_0^1 (x - x^3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Donc l'aire est égale à $\frac{1}{12}$ u.a.

Correction de l'exercice 17 : Valeur moyenne

1 $\mu = \frac{1}{6}\int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{6}\left[2t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_0^6 = \frac{1}{6}\left(2 \times 6^3 - \frac{1}{4} \times 6^4\right) = \frac{108}{6} = 18$.

2 Il y a donc en moyenne 18 malades chaque jour dans ce lycée.

Correction de l'exercice 15 : Étudier une suite d'intégrales

1 **a.** Graphiquement, I_n représente l'aire, en u.a., de la surface $\mathscr{S}_n$ délimitée par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Pour n entier naturel non nul, $\mathscr{C}_{n+1}$ est au-dessous de $\mathscr{C}_n$ donc l'aire de $\mathscr{S}_{n+1}$ est inférieure à l'aire de $\mathscr{S}_n$. On conjecture que la suite (I_n) est décroissante.
b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel x de [0 ; 1], $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$. Or, $x^n \geqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$.
Donc $x^n \geqslant x^{n+1}$. De plus, $e^{-x} > 0$. On a donc $x^n e^{-x} \geqslant x^{n+1} e^{-x}$ et d'après la propriété de comparaison : $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ c'est-à dire, $I_n \geqslant I_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (I_n) est décroissante.

2 Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et pour x dans [0 ; 1], $x^n \geqslant 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $x^n e^{-x} \geqslant 0$. Ainsi, $I_n \geqslant 0$.
De plus, $e^{-x} \leqslant 1$ donc $x^n e^{-x} \leqslant x^n$, donc $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$.
Or, $\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Donc, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Correction de l'exercice 16 : Aire entre deux courbes

Pour tout réel x de [0 ; 1], on a : $x^3 \leqslant x^2$. Donc $\mathscr{C}_g$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$ sur [0 ; 1].
L'aire est égale, en u.a., à $\int_0^1 \left(x - x^3\right)\mathrm{d}x$.
Or, $\int_0^1 (x - x^3)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Donc l'aire est égale à $\frac{1}{12}$ u.a.

Correction de l'exercice 17 : Valeur moyenne

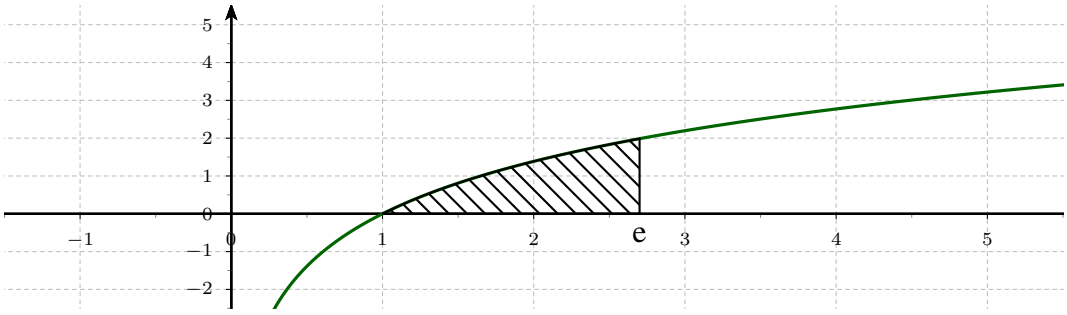
1 $\mu = \frac{1}{6}\int_0^6 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\left[2t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_0^6 = \frac{1}{6}\left(2 \times 6^3 - \frac{1}{4} \times 6^4\right) = \frac{108}{6} = 18$.

2 Il y a donc en moyenne 18 malades chaque jour dans ce lycée.

Correction de l'exercice 18

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2\ln x$$



1. **On donne la courbe de f sur le graphique ci-dessus.**
   Hachurer sur le graphique l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

2. **Donner un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire hachurée.**
   Un encadrement (en unités d'aire du repère orthogonal donné) de l'aire hachurée est :

   $$\boxed{1 < \mathcal{A} < 4}$$

3. **Montrer qu'une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est : $F(x) = 2x\ln x - 2x$.**
   La fonction F est définie et dérivable sur I. Elle est de la forme $uv - w$ donc de dérivée $u'v + uv' - w'$ avec pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$:

$u(x) = 2x$	$u'(x) = 2$
$v(x) = \ln x$	$v'(x) = \dfrac{1}{x}$
$w(x) = 2x$	$w'(x) = 2$

   Pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$:

   $$\begin{aligned} F'(x) &= 2 \times \ln x + 2x \times \frac{1}{x} - 2 \\ F'(x) &= 2\ln x + 2 - 2 \\ F'(x) &= 2\ln x \\ F'(x) &= \underline{f(x)} \end{aligned}$$

   La dérivée de F sur $]0\,;\,+\infty[$ est donc f ce qui prouve que la fonction F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. **Montrer que l'intégrale sur $[1\,;\ \mathrm{e}\,]$ de f est : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 2\ln x\,\mathrm{d}x = 2$.**

   $$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} 2\ln x\,\mathrm{d}x &= F(\mathrm{e}) - F(1) \\ &= (2 \times \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - 2\mathrm{e}) - (2 \times 1\ln 1 - 2 \times 1) \\ &= \underbrace{(2\mathrm{e} - 2\mathrm{e})}_{0} - \left(\underbrace{2\ln 1}_{0} - 2 \times 1\right) \end{aligned}$$

   $$\boxed{\int_1^{\mathrm{e}} 2\ln x\,\mathrm{d}x = \underline{2}}$$

5. On a tracé ci-dessous (T), la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. a. Montrer que la tangente (T) est d'équation $y = 2x - 2$.

Pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$ on a :

$$f(x) = 2\ln x \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{2}{x}$$

L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 1$ est

$$(T)\ :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f\,(1) & = +0 \\ f'\,(1) & = 2 \end{array} \right. \Rightarrow\ (T)\ :\ y = 2\times(x-1)\ +0 \iff \boxed{y = 2x-2}$$

5. b. Montrer que (T) est située au dessus de $\mathscr{C}_f$.

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - 2 - 2\ln x$$

La fonction g est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et :

$$g'(x) = 2 - \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)}{x}$$

Sur $]0\,;\,+\infty[$, le dénominateur x est strictement positif donc g' est du signe de $2(x-1)$. On obtient alors facilement puisque $g'(x) = 0 \iff x = 1$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de g	‖	↘	$g(1)=0$	↗	

Donc le minimum de g sur $]0\,;\,+\infty[$ est 0, la fonction g est donc positive sur cet intervalle et

$$\forall x \in\,]0\,;\,+\infty[\,,\, g(x) \geqslant 0 \iff (2x-2) \geqslant 2\ln x$$

Donc (T) est située au dessus de $\mathscr{C}_f$.

5. c. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

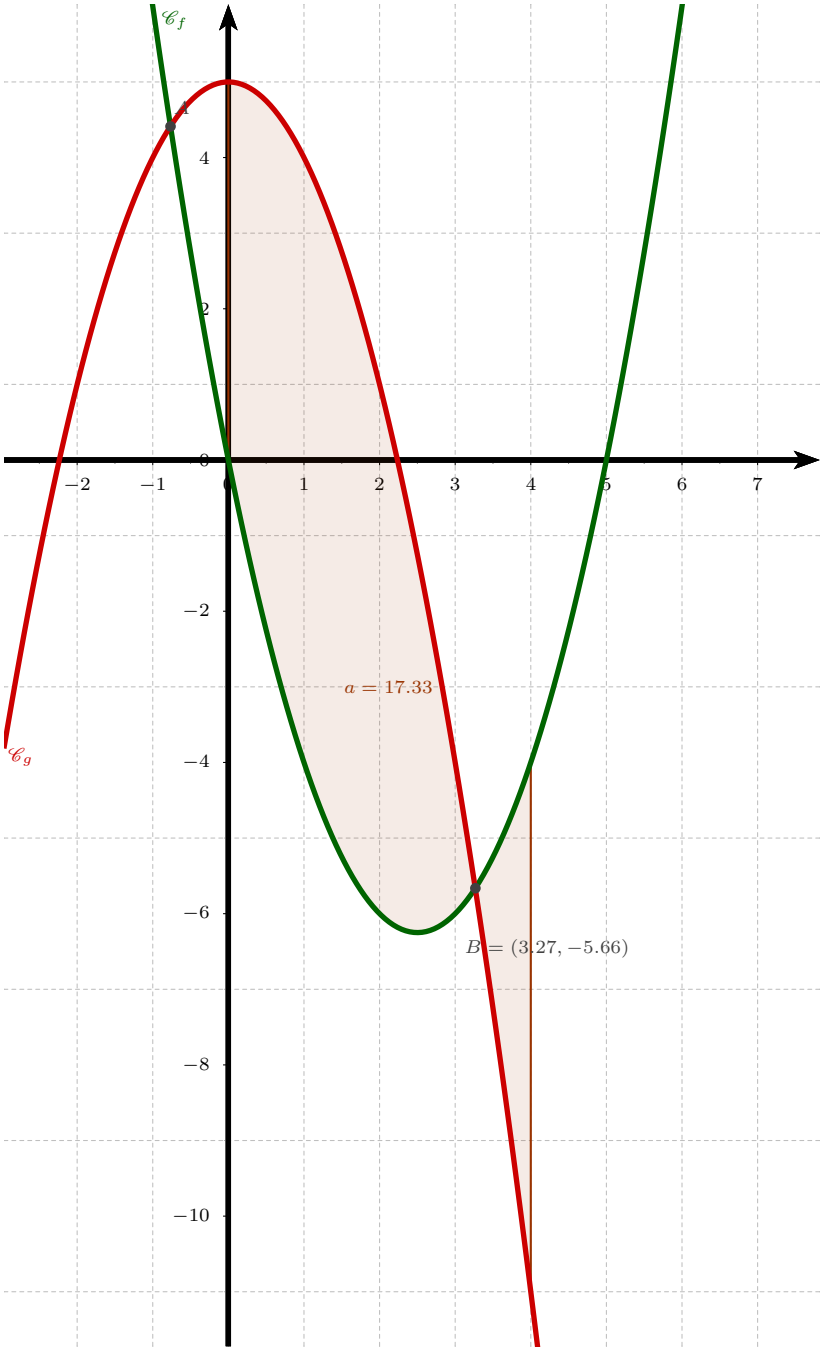
On a montré que (T) est située au dessus de $\mathscr{C}_f$ donc l'expression $(2x - 2 - f(x))$ est positive sur $]0\,;\,+\infty[$.
De ce fait, l'aire l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est donnée, en unités d'aire par : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (2x - 2 - f(x))\,\mathrm{d}x$.
La fonction $x \longmapsto 2x - 2$ est continue sur $[1\,;\,\mathrm{e}\,]$ donc elle admet des primitive de la forme $x \longmapsto x^2 - 2x + k$.
On a donc par linéarité :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} (2x - 2 - f(x))\,\mathrm{d}x \\ \mathcal{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} (2x-2)\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^2 - 2x\right]_1^{\mathrm{e}} - 2 \\ \mathcal{A} &= \mathrm{e}^{\,2} - 2\,\mathrm{e} - \left(1^2 - 2\right) - 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathrm{e}^{\,2} - 2\,\mathrm{e} - 1}$$

Correction de l'exercice 23 page 13

Soit f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x$ et $g(x) = -x^2 + 5$. Déterminer (en u.a.) l'aire de la partie comprise entre les deux courbes représentatives de f et g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.



1. Étude du signe de $f(x) - g(x)$. Pour x réel :

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 5x - 5$$

L'expression $\left(2x^2 - 5x - 5\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -5 \\ c = -5 \end{array} \right| \Longrightarrow \Delta = 65 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(2x^2 - 5x - 5\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{65}}{4} \approx -0.77 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{65}}{4} \approx 3.27$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Calcul de l'aire.
Pour calculer l'aire du domaine, il faut donc utiliser la propriété de Chasles pour les intégrales.

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^4 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{x_2} g(x)-f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^4 f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{x_2} (-2x^2+5x+5)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^4 (2x^2-5x-5)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ -2\frac{x^3}{3}+5\,\frac{x^2}{2}+5x\ \right]_0^{x_2} + \left[\ 2\frac{x^3}{3}-5\,\frac{x^2}{2}-5x\ \right]_{x_2}^4 \\
A &\approx 22,21
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 19 : Suite d'intégrales

On donne pour tout entier naturel n non nul :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0.

Corrigé

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ \ln(\mathrm{e}^x + 1)\ \Big]_0^1 = \ln(\mathrm{e} + 1) - \ln 2$$

et

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1 + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = \Big[\ x\ \Big]_0^1 = 1$$

d'où

$$I_0 = (I_0 + I_1) - I_1 = 1 - \ln(\mathrm{e} + 1) + \ln 2$$

2. Pour tout entier naturel n, calculer $I_{n+1} + I_n$.

Corrigé

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x} + \mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x} + \mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nx}\,(\mathrm{e}^x + 1)}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x \\ I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- Si $n = 0$, alors on a vu que :

$$\boxed{I_1 + I_0 = 1}$$

- Si $n > 0$, alors :

$$I_{n+1} + I_n = \left[\ \frac{\mathrm{e}^{nx}}{n}\ \right]_0^1 \Longrightarrow \boxed{I_{n+1} + I_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n} - \frac{1}{n}}$$

3. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

4. Prouver que pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ on a :

$$\frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e} + 1} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x + 1} \leqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{nx}$$

5. En déduire que pour tout n entier, $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{1 + \mathrm{e}}\,\frac{\mathrm{e}^n - 1}{n} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^n - 1}{n}$$

6. Montrer alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$$

7. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\mathrm{e}^n} = 0$$

Correction de l'exercice 24

Longueur d'un arc

Soit f une fonction dérivable et de dérivée continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
On dit dans ce cas que la fonction f est « de classe C^1 sur $[a\,;\,b]$ » ou que $f \in C^1([a\,;\,b])$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit $A\,(a\,;\ f(a))$ et $B\,(b\,;\ f(b))$ deux points de la courbes $\mathscr{C}_f$.

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ est donné par la formule :

$$\boxed{\overset{\frown}{\text{AB}} = \int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}\,\text{d}t}$$

On pose :

$$f(x) = \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3}$$

Déterminer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$, avec A et B deux points de la courbe d'abscisse $a = 2$ et $b = 3$.

Corrigé

La fonction f est dérivable, et de dérivée continue sur $[a\,;\,b]$. Pour tout réel x de $[2\,;\ 3]$ on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{4x^2} + x^2$$

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ est donné par la formule :

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{\text{AB}} = \int_2^3 \sqrt{1+f'(t)^2}\,\text{d}t &= \int_2^3 \sqrt{1+\left(-\frac{1}{4t^2}+t^2\right)^2}\,\text{d}t\\ &= \int_2^3 \sqrt{t^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{16t^4}}\,\text{d}t\\ &= \int_2^3 \sqrt{\left(t^2+\frac{1}{4t^2}\right)^2}\,\text{d}t\end{aligned}$$

Puisque $t^2 + \dfrac{1}{4t^2}$ est positif on a :

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{\text{AB}} = \int_2^3 \left(\sqrt{1+f'(t)^2}\right)\text{d}t &= \int_2^3 t^2+\frac{1}{4t^2}\,\text{d}t\\ &= \left[\ \frac{t^3}{3}-\frac{1}{4t}\ \right]_2^3 = \frac{51}{8}\end{aligned}$$

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{AB}}$ est $\boxed{\overset{\frown}{\text{AB}} = \dfrac{51}{8}}$.